Feuille d'exercices 1 : représentation d'interactions stratégiques

Exercice 1. Représenter le jeu à deux joueurs Pierre-Papier-Ciseaux comme un jeu sous forme normale, puis comme un jeu sous forme extensive. Rappelons que le Papier bat la Pierre, qui bat les Ciseaux, qui battent le Papier. Si les deux joueurs jouent le même symbole la partie est nulle, et les utilités sont de 0 pour chacun. Si un joueur bat l'autre, le gagnant a une utilité de 1, le perdant une utilité de -1.

Exercice 2. Représenter les variantes suivantes du jeu Pierre-Papier-Ciseaux ; dans chaque cas, dire combien les joueurs ont de stratégies pures.

a) Variante 1 : avant de jouer, le joueur 2 observe le coup du joueur 1.

b) Variante 2 : avant de jouer, avec probabilité 1/2, le joueur 2 observe le coup du joueur 1 ; avec probabilité 1/2, aucun joueur n'observe quoi que ce soit. Le joueur 1 ne sait pas si le joueur 2 observe son coup ou pas.

c) Variante 2 bis : avant de jouer, avec probabilité 1/2, le joueur 2 observe le coup du joueur 1 ; avec probabilité 1/2, aucun joueur n'observe quoi que ce soit. Le joueur 1 sait si le joueur 2 observe son coup ou pas.

d) Variante 3 : si le joueur 1 joue Pierre, alors le joueur 2 l'observe avec probabilité 1/2 avant de jouer. Si le joueur 1 joue Ciseaux ou Papier, aucun joueur n'observe quoi que ce soit (on peut supposer par exemple que quand le joueur 1 se prépare à jouer Pierre, il a une fois sur deux un tic nerveux qui révèle à l'autre qu'il va jouer Pierre). Le joueur 1 ne sait pas si le joueur 2 observe son coup ou pas.

Exercice 3. Soit n un entier naturel. On considère le jeu à 2 joueurs suivant. On dispose d'un tas de n allumettes. Le joueur 1 prend ou une deux allumettes, puis tant qu'il y a des allumettes, le joueur 2 prend une ou deux allumettes, et ainsi de suite alternativement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'allumettes. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu. Il a une utilité de -1, et l'autre joueur a une utilité de 1. Pour $n = 2$ puis $n = 3$, représenter ce jeu et dire combien chaque joueur a de stratégies pures.

Exercice 4. L'entreprise des frères L. peut investir de manière risquée ou non risquée. Si elle choisit un investissement non risqué, elle obtient un gain modéré à coup sûr. Si elle choisit un investissement risqué, elle fait un gain important avec probabilité 1/2, une perte modérée avec probabilité 1/3 et fait faillite avec probabilité 1/6. En cas de faillite, l'Etat peut soit décider de sauver l'entreprise, soit de ne pas intervenir. L'entreprise et l'Etat préfèrent tous les deux, par ordre décroissant, les issues suivantes : a) gain important, b) gain modéré, c) perte modérée, d) faillite et secours de l'Etat, e) faillite et absence d'intervention de l'Etat. Si l'entreprise est sûre qu'en cas de faillite, l'Etat la sauvera, elle préfère faire un investissement risqué. Si elle est sûre que l'Etat n'interviendra pas, elle préfère l'investissement non risqué.

a) Donner un exemple de jeu sous forme extensive compatible avec cette description.

b) Supposons que l'Etat doive régulièrement jouer à de tels jeux avec des entreprises différentes. Pourquoi cela pourrait-il pousser l'Etat à ne pas intervenir en cas de faillite ? (on demande juste une intuition).

Exercice 5. Le jeu du "morpion n-n avec remplissage jusqu'au bout" se décrit ainsi : il y a deux joueurs. On dispose d'une tableau de n cases sur n. Le premier joueur met une croix dans l'une des cases, puis le joueur 2 met un rond dans l'une des cases restées vides, puis le joueur 1 met une croix dans l'une des cases restées vides, et ainsi de suite, alternativement, JUSQU'A CE QUE LES NEUFS CASES SOIENT REMPLIES. Si à la fin de la partie, aucun des joueurs n'est parvenu à aligner trois de ses symboles, la partie est nulle et les deux joueurs ont une utilité de 0. Sinon, le premier joueur qui a réussi a aligner (sur une ligne, une colonne, ou une diagonale) trois de ses symboles a gagné : il a une utilité de 1 et l'autre a une utilité de -1.

Combien y-a-t-il de déroulement de parties possibles ? Combien chaque joueur a-t-il de stratégies ? On pourra commencer par examiner le cas $n = 2$.

Exercice 6. Représenter le jeu du dilemme du prisonnier répété deux fois où les paiements finaux sont la somme des paiements d'étape. Combien chaque joueur a-t-il de stratégies ? Donner des exemples de stratégies mixtes et de stratégies de comportement. Combien de données faut-il (au maximum) pour décrire une stratégie mixte ? pour décrire une stratégie de comportement ?