

Feuille 2**Exercice 1.**

Une assemblée composée de 99 membres doit voter à la majorité pour choisir entre deux projets: a et b . Chaque membre $i \in \{1, \dots, 99\}$ est doté d'une fonction d'utilité $u^i : \{a, b\} \mapsto \{0, 1\}$ supposée bijective. Pour voter, chacun écrit a ou b sur un bulletin secret. Le projet remportant la majorité des suffrages est adopté.

1- Ecrire le jeu sous forme stratégique associé et montrer que voter pour le projet que l'on préfère est une stratégie dominante.

2- Il y a maintenant 3 votants et 3 projets a, b, c . On suppose $u^1(a) = u^2(b) = u^3(c) = 2$, $u^1(b) = u^2(c) = u^3(a) = 1$, $u^1(c) = u^2(a) = u^3(b) = 0$. Pour voter, chacun écrit a, b ou c sur un bulletin secret. Le projet remportant la majorité des suffrages est adopté (si chaque projet reçoit un vote, aucun projet n'est réalisé et l'utilité de chacun vaut 0). Y a-t-il un équilibre en stratégies dominantes ?

Exercice 2. Enchères au second prix sous plis scellés

Un bien est mis aux enchères. Il y a n acheteurs potentiels numérotés de 1 à n . La procédure d'enchères est la suivante: chaque acheteur soumet une offre écrite sous pli scellé. Tous les plis sont transmis à un commissaire priseur. L'acheteur ayant soumis l'offre la plus haute emporte le bien et paye un prix égal à la seconde plus haute offre (en cas de gagnants ex-aequo, le joueur de plus petit numéro parmi les gagnants achète l'objet au prix le plus haut).

Chaque acheteur i a une valuation v^i dans $\mathbb{R}_+$, qui représente la somme à laquelle il évalue le bien. S'il achète le bien au prix p , son utilité est $v^i - p$. S'il ne l'achète pas, son utilité est nulle.

Modéliser cette situation par un jeu sous forme stratégique. Montrer qu'offrir sa propre valuation est une stratégie dominante.

Exercice 3

Calculer les équilibres de Nash (en stratégies pures) du jeu à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, le joueur 3 la matrice, la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2, la 3ème celui du joueur 3).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (0, 0, 0) & (0, 1, -1) \\ (2, 2, 2) & (-1, 3, 4) \end{array} \right) \\ & \begin{array}{c} O \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cc} (8, 4, 2) & (7, 7, -2) \\ (9, 2, 5) & (-10, 1, 0) \end{array} \right) \\ & \begin{array}{c} E \end{array} \end{array}$$

Exercice 4

Calculer les équilibres de Nash (en stratégies pures) du jeu à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne, le joueur 3 la matrice, la 1ère composante donne le paiement du joueur 1, la 2nde celui du joueur 2, la 3ème celui du joueur 3).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (-1, 0, -1) & (1, 1, 1) \\ (2, 0, 3) & (5, -1, 4) \end{array} \right) \\ & \begin{array}{c} O \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ & \left(\begin{array}{cc} (-6, 4, -1) & (1, 2, 3) \\ (-8, 0, 2) & (0, 0, 0) \end{array} \right) \\ & \begin{array}{c} E \end{array} \end{array}$$

Exercice 5. Duopole de Cournot

Deux entreprises produisent le même bien à un coût de production marginal constant égal à $c \in]0, 1[$. Si le prix du bien est p , la demande est $D(p) = 1 - p$.

Simultanément chaque entreprise $i \in \{1, 2\}$ choisit la quantité $q^i \geq 0$ qu'elle produit. Le "marché" égalise l'offre et la demande et le prix s'établit alors à $p = 1 - (q^1 + q^2)$. Chaque entreprise i vend alors la quantité q^i de bien au prix p . Chaque entreprise cherche à maximiser son profit.

Ecrire le jeu sous forme stratégique associé. Montrer qu'il existe un unique équilibre de Nash.

Exercice 6. Calculer dans chaque cas les équilibres de Nash du jeu

$G = (N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$, où $N = \{1, 2\}$, $A^1 = A^2 = [0, 1]$, et (x représente la stratégie du joueur 1, y celle du joueur 2):

- a) $g^1(x, y) = 5xy - x - y + 2$; $g^2(x, y) = 5xy - 3x - 3y + 5$.
- b) $g^1(x, y) = -2x^2 + 7y^2 + 4xy$; $g^2(x, y) = (x + y - 1)^2$.
- c) $g^1(x, y) = -2x^2 + 7y^2 + 4xy$; $g^2(x, y) = (x - y)^2$.

Exercice 7.

Un groupe de n pêcheurs exploite un lac contenant une quantité de poisson considérée comme infinie. Si chaque pêcheur i prend une quantité $x_i \geq 0$, le prix unitaire du poisson s'établit à $p = \max(1 - \sum_{i=1}^n x_i, 0)$. Chaque pêcheur vend toute sa production au prix p et cherche à maximiser son revenu (le coût de production est supposé nul).

- 1- Ecrire le revenu du pêcheur i en fonction de $(x_1, \dots, x_n)$.
- 2- Calculer la correspondance de meilleure réponse, les équilibres de Nash et le revenu total à chaque équilibre.
- 3- Etudier le cas du monopole ($n = 1$) et comparer.

Exercice 8.

Soit $G = (N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$ un jeu à deux joueurs symétrique, c'est-à-dire tel que: $N = \{1, 2\}$, $A^1 = A^2$ noté X , et $\forall (x^1, x^2) \in X \times X$, $g^1(x^1, x^2) = g^2(x^2, x^1)$.

On suppose que X est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, que g^1 est continue et que pour tout x^2 dans X , l'application qui à x^1 associe $g^1(x^1, x^2)$ est quasiconcave.

Montrer qu'il existe un équilibre symétrique, i.e. qu'il existe un élément x^* de X tel que (x^*, x^*) soit un équilibre de Nash de G . (On pourra poser $D = \{(x^1, x^2) \in X \times X, x^1 = x^2\}$ et appliquer le théorème de Kakutani à une correspondance bien choisie de D dans D).

Exercice 9. Calculer les équilibres de Nash en stratégies mixtes des jeux suivants.

$$\begin{array}{c} H \\ B \end{array} \begin{array}{cc} G & D \\ \left(\begin{array}{cc} (1, 2) & (0, 0) \\ (0, 0) & (2, 1) \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} H \\ B \end{array} \begin{array}{cc} G & D \\ \left(\begin{array}{cc} (6, 6) & (2, 7) \\ (7, 2) & (0, 0) \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} H \\ B \end{array} \begin{array}{cc} G & D \\ \left(\begin{array}{cc} (5, 4) & (3, 3) \\ (3, 3) & (7, 8) \end{array} \right) \end{array}$$