Eléments de théorie des contrats :

Le modèle principal-agent avec action cachée. [1]

Avertissement : il est très probable que, malgré les efforts de l'auteur, des fautes de frappes subsistent dans ce polycopié. Merci de signaler les plus gênantes à l'adresse viossat@ceremade.dauphine.fr.

1 Introduction 1 : incitation et aversion au risque

Considérons un client qui cherche à employer un avocat pour le défendre dans un procès. Plus l'avocat passera de temps à étudier le dossier, plus le client aura de chances de gagner le procès. On peut donc supposer que le client serait prêt à signer un contrat stipulant qu'il paiera un salaire élevé à l'avocat si celui-ci consacre un temps important à son dossier. Si, à un coût faible, le client peut observer et faire constater par un juge le travail fourni par l'avocat, un contrat de ce type est envisageable et a priori efficace. Il paraît toutefefois plus probable que le client ne puisse pas savoir si l'avocat a fait sérieusement son travail, ou tout du moins qu'il ne puisse rien prouver. Cela crée un problème dit d'aléa moral : l'avocat peut prétendre qu'il va étudier le dossier à fond et ne pas le faire ; le client ne pourra pas se retourner contre lui.

Pour inciter l'avocat à faire des efforts, le client peut faire dépendre la rémunération de l'avocat du résultat du procès. Toutefois, une autre difficulté apparaît : le résultat du procès ne dépend pas que des effort de l'avocat ; il dépend aussi de facteurs aléatoires, comme l'humeur du juge le jour du jugement, les efforts de l'avocat de la partie adverse, la découverte fortuite d'une pièce compromettante, etc. Si le client propose à l'avocat un salaire élevé s'il gagne le procès, mais très faible s'il le perd, l'avocat pourrait refuser par crainte de travailler pour rien.

En supposant que l'avocat a de l'aversion pour le risque, il y a une tension entre le fait de l'inciter à l'effort en le rémunérant davantage s'il gagne le procès que s'il le perd, et le fait de rendre le contrat acceptable par l'avocat en le prémunissant contre un risque trop élevé. C'est cette tension et les inefficacités qui en résultent que nous allons étudier dans ce chapitre. Citons quelques autres exemples de relations économiques ayant une structure similaire :

- le propriétaire de terres et l'agriculteur : l'agriculteur peut cultiver les terres du propriétaire, en faisant plus ou moins d'efforts. Seule la production agricole finale est observable, et celle-ci ne dépend pas que des efforts de l'agriculteur. Pour inciter l'agriculteur à l'effort, le propriétaire foncier peut rémunérer l'agriculteur en fonction de la production obtenue, par exemple en lui donnant un pourcentage de la production ; mais ceci fait courir des risques à l'agriculteur, qui peuvent l'amener à refuser ce type de rémunération. En pratique, plusieurs types de contrats sont utilisés, dont le fermage (l'agriculteur reçoit un salaire fixe) et le métayage (l'agriculteur reçoit une partie de la récolte, anciennement la moitié, d'où le nom).

[1] Ces notes, très incomplètes, s'inspirent de notes de Françoise Forges, du livre de Jean-Jacques Laffont et David Martimort (*The Theory of Incentives : The Principal-Agent Model*, Princeton University Press, 2001), d'un polycopié de Thierry Granger, et du polycopié de Bernard Caillaud pour le cours de microéconomie avancée donné à l'Ecole polytechnique.

- l'assureur et l'assuré : l'assureur souhaite que l'assuré fasse des efforts pour ne pas subir de dommages, et peut proposer dans ce but un contrat avec franchise, ou de ne rembourser qu'un pourcentage du dommage. Mais dans ce cas, l'assuré ne sera pas entièrement couvert, et cela peut l'amener à ne pas être intéressé par l'offre de l'assureur.

- l'employeur et le vendeur : un vendeur peut faire plus ou moins d'efforts pour trouver des clients. Souvent, ces efforts ne sont pas observables, et seules les ventes le sont. L'employeur peut rémunérer le vendeur en fonction des ventes qu'il conclut, mais cela fera courir des risques au vendeur.

Citons encore : le propriétaire qui cherche à vendre sa maison et l'agence immobilière ; l'actionnaire et le manager ; l'Etat et le chercheur ; l'électeur et l'Etat ; et d'une manière générale, l'employeur et l'employé.

2 Introduction 2 : une histoire de pêcheurs

Considérons la situation suivante : vous dirigez une entreprise de pêche qui emploie de nombreux pêcheurs. Vous souhaitez embaucher un pêcheur supplémentaire. La quantité de poisson qu'il rapporte dépend à la fois du temps qu'il passe en mer et de facteurs aléatoires. On suppose que l'utilité du pêcheur est de la forme $u(w,k) = u(w) - kc$, où w est sa rémunération, k le nombre d'heures par jour qu'il passe à travailler et c la désutilité par heure de travail. Votre but est de proposer un contrat qui vous coûte le moins cher possible, en espérance, et qui incite le pêcheur à travailler 8h par jour. En supposant que le pêcheur a de l'aversion pour le risque et qu'il n'accepte un contrat que s'il lui permet d'obtenir une espérance d'utilité au moins égale à u_r (son utilité de réserve), quel type de contrat devez-vous proposer ? En particulier, devez-vous lui verser un salaire fixe ou un salaire qui dépende de la quantité de poisson qu'il rapporte ?

La réponse dépend de l'information que vous pouvez obtenir (et utiliser) sur l'effort de l'agent, c'est à dire ici sur le nombre d'heures qu'il passe à pêcher.

Supposons tout d'abord que vous pouvez observer, et si besoin est faire constater par un tribunal, le nombre d'heures pendant lequel le pêcheur pêche. Vous pouvez alors offrir un contrat du type suivant : si tu pêches 8h par jour, tu recevras le salaire fixe w tel que $u(w) - 8c = u_r$; sinon, tu seras licencié, où tu encourras une amende suffisamment dissuasive. Ce contrat est acceptable pour l'agent (il lui permet d'obtenir l'utilité u_r), et s'il l'accepte, il sera bien incité à travailler 8h par jour. De plus, parmi les contrats qui ont ces propriétés, c'est celui qui vous revient le moins cher. C'est donc le contrat optimal.[2]

Supposons maintenant que vous ne puissiez pas observer l'effort du pêcheur, ou tout du moins que vous ne puissiez pas faire dépendre directement le salaire de l'agent de son effort. Par exemple parce qu'il va pêcher seul en Alaska et que vous ne pouvez pas observer ce qu'il y fait. Pour clarifier

[2]En effet, supposons que vous proposiez un autre contrat, pas forcément de type salaire fixe, au pêcheur ; pour un effort fixé, le salaire que reçoit le pêcheur peut se voir comme une loterie (c'est une loterie certaine si le contrat est du type salaire fixe, et une loterie risquée sinon). Soit l cette loterie dans le cas où l'agent fait l'effort demandé. Pour que l'agent accepte le contrat et travaille 8h par jour, il faut que cela lui procure une espérance d'utilité d'au moins $u_r = u(w^*) - 8c$, donc que son salaire espéré (la loterie l) lui procure une espérance d'utilité d'au moins $u_r + 8c = u(w^*)$ donc que l'équivalent certain de l soit au moins égal à w^*, donc que l'espérance de gain de l (i.e. le salaire moyen) soit au moins égal à w^*. Si vous n'arrivez pas à voir en quoi le salaire que reçoit l'agent peut s'apparenter à une loterie, relisez cette note après avoir lu les sections suivantes.

la situation, nous supposerons que l'interaction n'est pas répétée : le pêcheur part au loin pour toute la saison, ce n'est qu'à son retour que vous saurez ce qu'il a pêché ; de plus, vous savez qu'après cette saison il prendra sa retraite, qu'il n'habite pas la même région que vous, et que vous ne le reverrez pas.

Puisque vous n'observez pas l'effort, la seule chose (sensée) que vous puissiez faire est de faire dépendre le salaire de l'agent de la quantité de poisson qu'il rapporte.[3] Si vous proposez au pêcheur un salaire fixe w quelle que soit la quantité de poisson qu'il rapporte, il n'aura aucune incitation à pêcher pendant $8h$ par jour. En effet, s'il le fait, il obtient une utilité $u(w) - 8c$, alors que s'il reste au chaud chez lui il obtient $u(w) > u(w) - 8c$. Pour inciter le pêcheur à faire l'effort souhaité, il faut donc faire dépendre son salaire de la quantité de poisson qu'il rapporte. Mais comme cette quantité de poisson ne dépend pas que de son effort mais aussi de facteurs aléatoires (il y a de bonnes et de mauvaises saisons), cela fera courir un risque à l'agent. Pour que l'agent accepte de courir ce risque, il faudra lui donner un salaire moyen plus élevé que dans la situation précédente et votre profit sera moindre. C'est l'un des messages essentiels de ce chapitre : pour inciter un agent à faire un effort élevé quand l'effort n'est pas directement observable, il faut faire courir un risque à l'agent, et pour que l'agent accepte le contrat, il faudra rémunérer ce risque. Le profit de la personne qui propose le contrat sera donc moindre quand l'effort de l'agent n'est pas observable que quand il l'est.[4]

Quant au contrat précis qu'il est optimal de proposer au pêcheur, avant de savoir le calculer, nous avons un bout de chemin intellectuel à faire ensemble.

3 Le modèle principal-agent avec action cachée

Nous cherchons à étudier les relations entre deux entités économiques dont l'une, le principal, peut employer l'autre, l'agent, pour réaliser une tâche. En échange, l'agent est rémunéré d'après un barème de rémunération (un contrat) fixé avant la réalisation de la tâche. Nous nous intéressons au modèle principal-agent avec action cachée (on dit aussi, avec aléa de moralité). Dans ce modèle, l'agent peut faire plus ou moins d'efforts pour accomplir sa tâche ; le principal ne peut pas observer cet effort, mais uniquement une grandeur qui dépend de l'effort mais aussi d'aléas. Pour fixer les idées, nous supposerons que cette grandeur est la production finale, et que le principal cherche à maximiser cette production finale nette du salaire versé à l'agent. Pour que le problème soit intéressant, nous supposerons que l'agent a de l'aversion pour le risque, et pour simplifier, que le principal est neutre au risque.

[3] Si l'interaction était répétée la situation serait très différente. Par exemple, vous pourriez proposer au pêcheur un salaire fixe mais en le prévenant qe vous ne le réembaucherez l'année d'après que s'il rapporte au moins une certaine quantité de poisson. Vous pourriez faire dépendre son salaire de ses prises moyennes des n dernières années, avec $n > 1$, de manière à diminuer les risques courus par l'agent, etc. La situation serait également différente si l'interaction n'était pas répétée mais contribuait à la réputation du pêcheur ou du principal, ou s'il y avait plusieurs pêcheurs qui partaient au même endroit (le principal pouvant alors rémunérer un pêcheur en fonction de la différence entre la quantité de poisson qu'il rapporte et de la quantité moyenne de poisson rapportée par les autres). L'étude de ces variantes dépasse le cadre de ce cours.

[4] Lorsque son effort n'est pas observable l'agent reçoit un salaire moyen plus élevé que quand l'effort est observable, mais a priori il n'obtient pas plus en terme d'utilité : en particulier, si l'on donne tout le pouvoir de négociation au principal, l'agent obtient son utilité de réserve dans les deux cas. La situation où l'effort n'est pas observable est moins bonne pour le principal celui qui propose le contrat sans être meilleure pour l'agent.

Enfin, nous supposerons que le principal fait une offre à prendre ou à laisser à l'agent ; celui-ci ne peut donc pas faire de contre-offre. Ce n'est pas une position normative (nous n'affirmons pas qu'il est bon qu'il en soit ainsi) ni positive (nous n'affirmons pas qu'il en est ainsi en général). C'est une hypothèse simplificatrice, qui permet de ne pas avoir à modéliser le processus de négociation entre le principal et l'agent, ce qui serait très difficile.

On aurait pu faire l'hypothèse polaire, et supposer que c'est l'agent qui fait une offre à prendre ou à laisser au principal.[5] L'analyse aurait été similaire, mais le contrat final différent. En effet, dans le cas où le principal a tout le pouvoir de négociation (c'est lui qui fait l'offre), l'agent n'obtiendra pas mieux que son utilité de réserve ; dans le cas opposé, c'est le principal qui n'obtiendrait que son utilité de réserve.

Nous commencerons par analyser le modèle le plus simple qui soit : l'agent a deux niveaux d'effort possibles, et il y a deux niveaux de production ; il n'y a pas de contraintes sur les salaires qu'on peut verser à l'agent (on peut lui verser des salaires négatifs !) et la relation n'est pas répétée dans le temps.

Avant de préciser le modèle, et pour bien comprendre le problème qu'il y a à faire courir des risques à l'agent, voici quelques rappels d'économie de l'incertain. Des rappels plus substantiels sont donnés dans l'appendice A.

4 Aversion pour le risque et prime de risque

Considérons un décideur qui doit choisir entre des loteries sur un ensemble I de résultats possibles. Nous supposerons que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que les éléments w de I sont des richesses finales possibles pour l'agent. Nous supposerons également que le décideur préfère une richesse élevée certaine à une richesse faible certaine.

Le décideur est *neutre au risque* s'il est indifférent entre toutes les loteries qui lui donne la même espérance de richesse finale. Un agent a de l'*aversion pour le risque* si pour n'importe quelle loterie l qui comporte un risque et d'espérance de gain $E_l(w)$, l'agent préfère recevoir la somme $E_l(w)$ à coup sûr que de participer à la loterie l. La somme EC_l telle que le décideur est indifférent entre recevoir EC_l à coup sûr et participer à la loterie l est l'*équivalent certain* de la loterie l. Pour n'importe quelle loterie l qui comporte un risque et pour n'importe quel décideur qui a, strictement, de l'aversion pour le risque, $EC_l < E_l(w)$. La différence $E_l(w) - EC_l$ est la *prime de risque* associé à la loterie l (elle croît avec l'aversion pour le risque du décideur).[6]

Si l'on propose à un agent économique de ne pas recevoir un salaire fixe, mais un salaire variable qui dépend d'aléas qu'il ne contrôle pas complètement, cela lui fait courir un risque. Pour qu'un agent qui a de l'aversion pour le risque accepte de courir ce risque, il faut que ce risque soit rémunéré ; c'est à dire que le contrat permette à l'agent de recevoir un salaire espéré plus élévé que le salaire fixe

[5] Dans le cas l'employeur et de l'employé, cette hypothèse serait naturelle dans un contexte de plein-emploi, où l'employé peut mettre les employeurs en concurrence. Dans le cas du propriétaire et de l'agence immobilière (resp. du client et de l'avocat), on peut imaginer que l'agence immobilière (resp. l'avocat) impose son barème de rémunération.

[6] Sous des hypothèses classiques, les préférences du décideur peuvent être représentées par l'espérance d'une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ (qui n'est pas unique). Le décideur est alors neutre au risque si u est affine (en particulier, si $u(w) = w$ pour tout w) ; il a de l'aversion pour le risque si u est concave.

qu'il pourrait se garantir par ailleurs.

5 Problème principal agent avec 2 efforts et 2 niveaux de production

5.1 Présentation du problème

La situation est la suivante : le principal propose un contrat à l'agent pour la réalisation d'un projet. Si l'agent accepte, il peut faire un effort faible ($e = B$) ou un effort élevé ($e = H$). Le succès du projet dépend de l'effort de l'agent ainsi que de facteurs aléatoires. La probabilité de succès du projet est de $\pi_H < 1$ s'il fait un effort élevé, et de $\pi_B < \pi_H$ s'il fait un effort faible.

$effort \diagdown issue$	Succès	Echec
H	π_H	$1 - \pi_H$
B	π_B	$1 - \pi_B$

Le profit du principal avant paiement de l'agent est de $\bar{q}$ si le projet réussit et de $\underline{q} < \bar{q}$ si le projet échoue. Le principal a donc a priori intérêt à ce que l'agent fasse un effort élevé.

Utilité du principal : le principal est neutre au risque. Sa fonction d'utilité est

$$u_P(q, w) = q - w$$

où q est le profit avant paiement de l'agent et w le salaire versé à l'agent. Si l'agent refuse le contrat, le principal obtient 0.

Utilité de l'agent : on suppose que la fonction d'utilité u_A de l'agent prend la forme séparable :

$$u_A(w, e) = u(w) - d_e$$

où $u(w)$ est l'utilité due au salaire et d_e la désutilité due à l'effort e fait par l'agent. Un effort élevé est plus coûteux qu'un effort faible : $d_H > d_B$. D'autre part, l'agent a de l'aversion pour le risque : la fonction u est strictement concave. Enfin, l'agent refuse tout contrat qui ne lui procure pas son utilité de réserve u_r.

Pour vérifier que vous avez compris, essayez de décrire cette situation comme un jeu sous forme extensive. Pour vous aider, voici le déroulement dans le temps :

$T = 0$: le principal propose un contrat à l'agent.

$T = 1$: l'agent accepte ou refuse. S'il refuse, il obtient u_r et le principal 0. S'il accepte, le jeu continue.

$T = 2$: l'agent choisit son effort.

$T = 3$: le projet réussit ou échoue. Il en résulte le profit q pour le principal.

$T = 4$: en application du contrat, l'agent reçoit un salaire w. Le principal reçoit $q - w$. [7]

[7] Attention : w n'est pas l'utilité de l'agent mais son salaire ; l'utilité de l'agent est $u(w) - d_e$, où e est l'effort choisi à la période 2. Il faut bien faire la distinction entre l'issue d'une interaction - qui correspond pour l'agent à un effort fourni et un salaire reçu - et l'évaluation de cette issue en terme d'utilité. Cette distinction était masquée dans le cours de théorie des jeux car on raisonnait directement sur les utilités.

La question est de savoir quel contrat le principal doit proposer à l'agent.[8]

5.2 Forme générale du raisonnement

5.2.1 Comportement de l'agent

Etant donné un contrat qui est proposé à l'agent, notons $u_A(e)$ l'espérance d'utilité de l'agent s'il accepte le contrat et choisit l'effort e.[9] L'agent a trois possibilités :

1) refuser le contrat, il obtient alors u_r ;

2) accepter le contrat et faire l'effort faible : il obtient alors $u_A(B)$

3) accepter le contrat et faire l'effort élevé : il obtient alors $u_A(H)$.

L'agent compare ces trois nombres, et choisit la possibilité qui lui donne la plus grande utilité. Le choix de l'agent dépend du contrat qui lui est proposé, puisque $u_A(B)$ et $u_A(H)$ en dépendent.

5.2.2 Comportement du principal

On suppose que le principal connaît la fonction d'utilité de l'agent et les probabilités de succès du projet pour les différents efforts que peut fournir l'agent. De plus, il sait que l'agent est rationnel. Il peut donc prévoir le comportement de l'agent. Le principal peut proposer à priori un nombre infini de contrats, mais qu'on peut classer dans trois grandes catégories :

1) ceux qui n'intéressent pas l'agent, car ils ne lui permettent pas d'obtenir son utilité de réserve.

2) ceux qui incitent l'agent à accepter et à faire l'effort faible.

3) ceux qui incitent l'agent à accepter et à faire l'effort élevé.

Pour faire son choix, le principal :

a) détermine le meilleur contrat parmi ceux qui induisent la participation de l'agent et l'effort faible, et calcule l'utilité $u_P(B)$ qu'il en tire.[10]

b) détermine le meilleur contrat parmi ceux qui induisent la participation de l'agent et l'effort élevé, et calcule l'utilité $u_P(H)$ qu'il en tire.

c) compare 0 (l'utilité obtenue en proposant un contrat inacceptable), $u_P(B)$ et $u_P(H)$.

Supposons pour simplifier que les trois nombres 0, $u_P(B)$ et $u_P(H)$ soient tous différents. Si le plus grand de ces nombres est 0, le projet n'est pas profitable : le principal ne propose rien à l'agent (ou un contrat inacceptable). Si c'est $u_P(B)$ (resp. $u_P(H)$), il propose le meilleur contrat induisant l'effort faible (resp. élevé).

La méthode se généralise, avec quelques subtilités, à un nombre quelconque d'efforts possibles.

---

[8] Même si cela ne sera pas explicite dans les sections suivantes, résoudre ce problème revient à calculer le ou les équilibres sous-jeux parfait du jeu précédent, et nous procéderons par induction à rebours.

[9] On suppose que l'agent connaît le contrat et les probabilités de succès du projet conditionnellement aux différents efforts qu'il peut fournir. Il peut donc calculer les espérances d'utilité $u_A(B)$ et $u_A(H)$.

[10] Par *meilleur contrat*, nous entendons le meilleur pour le principal, celui qui lui donne l'espérance de profit après salaire la plus élevée. Un contrat *induit la participation de l'agent* s'il permet à l'agent d'obtenir au moins son utilité de réserve. Il *induit l'effort faible* si, face à ce contrat, l'agent préfère faire un effort faible qu'un effort élevé.

5.3 Situation de référence 1 : effort observable

Dans ce cas, obtenir de l'agent un effort donné e ne pose pas de problème. Il suffit de lui proposer un contrat stipulant que si l'agent fait l'effort e, il recevra le salaire w ; sinon, il sera licencié (ou encourra une amende suffisamment importante pour être dissuasive). La plus petite valeur de w pour laquelle l'agent accepte le contrat est celle qui lui donne son utilité de réserve u_r, compte tenu de la désutilité due à l'effort. Le salaire optimal w_e vérifie donc $u(w_e) = u_r + d_e$, c'est à dire :

$$w_e = u^{-1}(u_r + d_e).$$

Le profit correspondant du principal est de

$$u_P(e) = E(u(q\,)|\,e) - w_e = \pi_e \bar{q} + (1 - \pi_e)\underline{q} - w_e$$

Si, par exemple, $u_P(H) > \max(u_P(B), 0)$, le principal demandera à l'agent de faire l'effort H en échange du salaire $w_H = u^{-1}(u_r + d_H)$. En posant $\Delta\pi = \pi_H - \pi_B$, $\Delta q = \bar{q} - \underline{q}$ et $\Delta w = w_H - w_B$, la condition $u_P(H) \geq u_P(B)$ peut se réécrire sous la forme :

$$\Delta\pi\Delta q \geq \Delta w$$

Ceci signifie que l'augmentation de la production obtenue quand l'agent fait un effort élevé suffit à compenser l'augmentation de la désutilité subie par l'agent.

Remarque 1 : quel que soit l'effort que le princpal choisira d'induire (faible, élevé, ou aucun) ; l'agent obtient toujours son utilité de réserve. Ceci est dû au fait que nous avons donné tout le pouvoir de négociation au principal.

Remarque 2 : pour induire un effort faible, il est inutile de menacer l'agent d'une amende s'il fait un effort élevé ! Il suffit de lui donner un salaire fixe w_B quel que soit son effort.

5.4 Cas intéressant : effort non observable

La différence avec le cas précédent est que le principal ne peut plus faire dépendre la rémunération de l'agent de l'effort fourni, mais seulement de la réussite ou non du projet. Si le principal souhaite que l'agent fasse un effort élevé, il va falloir l'inciter à le faire en lui donnant une rémunération plus élevée lorsque le projet réussit que lorsque le projet échoue. Puisque, quel que soit son effort, l'agent ne peut jamais être sûr que le projet va réussir, le contrat proposé par le principal lui fera courir un risque, qu'il faudra rémunérer. Du coup, le profit du principal sera moindre que dans le cas où le principal observe l'effort.[11]

Faisons maintenant une analyse plus précise : nous avons vu que les seuls contrats possibles et raisonnables étaient ceux qui faisaient dépendre la rémunération de l'agent de la réussite du projet, et seulement de la réussite du projet. Un tel contrat est caractérisé par les rémunérations $\bar{w}$ et $\underline{w}$ perçues par l'agent en cas, respectivement, de succès et d'échec du projet. Le problème du principal est donc de déterminer les valeurs optimales de $\bar{w}$ et $\underline{w}$. Pour ce faire, il faut d'abord analyser les conditions sous lesquelles l'agent accepte le contrat et choisit l'effort élevé.

[11]En théorie, le principal pourrait proposer un contrat qui fait dépendre la rémunération de l'agent de facteurs sur lesquels l'agent n'a aucune influence ; mais cela ferait courir à l'agent des risques qu'il faudrait rémunérer, sans que ces risques incitent l'agent à faire l'effort souhaité. Du fait de la neutralité au risque du principal, la seule raison de faire courir des risques à l'agent est de l'inciter à faire l'effort désiré. Il en irait autrement si le principal n'était pas neutre au risque.

5.4.1 Comportement de l'agent

Pour simplifier les notations, on pose $\bar{u} = u(\bar{w})$ et $\underline{u} = u(\underline{w})$. Si l'agent accepte le contrat et fournit un effort faible, il obtient :

$$u_A(B) = \pi_B \bar{u} + (1 - \pi_B)\underline{u} - d_B.$$

S'il accepte le contrat et fournit un effort élevé, il obtient :

$$u_A(H) = \pi_H \bar{u} + (1 - \pi_H)\underline{u} - d_H.$$

Enfin, s'il refuse le contrat, il obtient u_r.

L'agent choisira d'accepter le contrat et de faire l'effort élevé si cela lui lui donne une espérance d'utilité plus élevé que de faire l'effort faible :

$$u_A(H) \geq u_A(B) \qquad (CI)$$

et au moins son utilité de réserve

$$u_A(H) \geq u_r \qquad (CP)$$

La condition (CI) s'appele *contrainte d'incitation* et la condition (CP) *contrainte de participation*. En posant $\Delta\pi = \pi_H - \pi_B$, $\Delta u = \bar{u} - \underline{u}$ et $\Delta d = d_H - d_B$, la contrainte d'incitation peut se réécrire sous la forme :

$$\Delta\pi \Delta u \geq \Delta d \qquad (CI)$$

Ceci signifie que l'utilité supplémentaire due au salaire, lorsque l'agent fait l'effort élevé plutôt que l'effort faible, fait plus que compenser la désutilité supplémentaire due à l'effort.

Si la contrainte d'incitation n'est pas satisfaite, l'agent choisira d'accepter le contrat et de faire l'effort faible si

$$u_A(B) \geq u_r \qquad (CP')$$

et refusera le contrat sinon.

5.4.2 Meilleur contrat induisant (la participation et) l'effort faible

Le meilleur contrat induisant l'effort faible est de proposer un salaire fixe

$$\bar{w} = \underline{w} = w_B$$

où $w_B = u^{-1}(u_r + d_B)$. En effet, ce contrat induit bien l'effort faible et la partication, et ce au coût minimum, puisque tout contrat induisant la participation doit donner à l'agent une espérance de salaire d'au moins w_B. Comme dans le cas de l'effort observable, le profit correspondant du principal est de

$$u_P(B) = \pi_B \bar{q} + (1 - \pi_B)\underline{q} - w_B$$

5.4.3 Meilleur contrat induisant (la participation et) l'effort élevé

Si l'agent choisit un effort élevé, le profit du principal est de $\pi_H(\bar{q} - \bar{w}) + (1 - \pi_H)(\underline{q} - \underline{w}) = \left[\pi_H \bar{q} + (1 - \pi_H)\underline{q}\right] - [(\pi_H \bar{w} + (1 - \pi_H)\underline{w}]$. Le meilleur contrat induisant la participation et l'effort élevé est donc la solution du problème de maximisation du profit du principal :

$$\max_{(\underline{w},\bar{w})\in\mathbb{R}^2} \pi_H(\bar{q} - \bar{w}) + (1 - \pi_H)(\underline{q} - \underline{w})$$

sous les contraintes (CI) et (CP). De manière équivalente, c'est la solution du problème de minimisation du salaire moyen versé à l'agent :

$$\min_{(\underline{w},\bar{w})\in\mathbb{R}^2} \pi_H \bar{w} + (1 - \pi_H)\bar{w}$$

toujours sous les contraintes (CI) et (CP).

Un tel problème d'optimisation sous contrainte se résout normalement en utilisant un Lagrangien (voir la partie 2 du polycopié). Toutefois, le problème ci-dessus est suffisament simple pour qu'on puisse le résoudre directement, et cela permet de mieux faire ressortir les intuitions économiques. Par contrat optimal on entend ci-dessous : le meilleur contrat induisant la participation et l'effort élevé.

Propriété 1 : *dans tout contrat optimal, la contrainte de participation est saturée.*

En effet, supposons que dans un contrat optimal, la contrainte de participation soit satisfaite strictement. En diminuant légèrement $\underline{w}$, on obtient un nouveau contrat qui continue de respecter la contrainte de participation, et qui satisfait aussi (CI), car on a augmenté Δu sans modifier $\Delta\pi$ ni Δd. Ce nouveau contrat induirait donc la participation et l'effort élévé et à un coût moindre que le contrat initial puisque $\underline{w}$ a diminué. Ceci contredit l'optimalité du contrat initial.

Propriété 2 : *dans tout contrat optimal, la contrainte d'incitation est saturée.*

Idée de la preuve : supposons que dans un contrat optimal, la contrainte d'incitation soit satisfaire strictement. Il existerait alors un contrat avec le même salaire moyen mais un écart $\bar{w} - \underline{w}$ plus faible, et qui vérifierait toujours la contrainte d'incitation. Comme ce nouveau contrat donnerait le même salaire moyen à l'agent, mais en lui faisant courir moins de risque, il satisferait strictement la contrainte de participation. De plus, comme il induit la participation et l'effort élevé au même coût que le contrat optimal initial, le nouveau contrat est aussi optimal. Ceci contredit le fait que dans tout contrat optimal la contrainte de participation est saturée.

Preuve détaillée : supposons par l'absurde que, dans un contrat optimal $(\underline{w}^*, \bar{w}^*)$, (CI) soit satisfaite strictement. Considérons le contrat

$$(\underline{w}^* + \epsilon\pi_H, \bar{w}^* - \epsilon(1 - \pi_H)).$$

Pour $\epsilon > 0$ suffisament petit, par continuité, (CI) est toujours vérifiée. Fixons un tel ϵ, tel que de plus $\underline{w}' < \bar{w}'$ où $\underline{w}' = \underline{w}^* + \epsilon\pi_H$ et $\bar{w}' = \bar{w}^* - \epsilon(1 - \pi_B)$. Le contrat $(\underline{w}', \bar{w}')$ donne le même salaire moyen à l'agent que le contrat initial (vérifiez-le !). Pour appliquer le raisonnement du paragraphe "idée de la preuve", il suffit donc de montrer que ce contrat satisfait strictement (CP). Ceci est vrai dès que u est strictement concave, mais nous nous limitons ci-dessous au cas où u est dérivable.

Soit K la différence entre le membre de gauche de (CP) pour le nouveau contrat et le contrat optimal initial. Puisque le contrat initial satisfait (CP), il suffit de montrer que K est strictement positif. Or on a

$$K = \pi_H \left[u(\bar{w}') - u(\bar{w}^*)\right] + (1 - \pi_H) \left[u(\underline{w}') - u(\underline{w}^*)\right]$$

Puisque u est dérivable, il existe w_g dans $]\bar{w}', \bar{w}^*[$ tel que $u(\bar{w}') - u(\bar{w}^*) = (\bar{w}' - \bar{w}^*)u'(w_g)$. De même, il existe w_p dans $]\underline{w}^*, \underline{w}'[$ tel que $u(\underline{w}') - u(\underline{w}^*) = (\underline{w}' - \underline{w}^*)u'(w_p)$. Donc

$$K = \pi_H(\bar{w}' - \bar{w}^*)u'(w_g) + (1 - \pi_H)(\underline{w}' - \underline{w}^*)u'(w_p)$$

avec $w_p < \underline{w}' < \bar{w}' < w_g$. En utilisant $\underline{w}' = \underline{w}^* + \epsilon\pi_H$ et $\bar{w}' = \bar{w}^* - \epsilon(1 - \pi_H)$, il vient :

$$K = \epsilon\pi_H(1 - \pi_H)(u'(w_p) - u'(w_g))$$

Comme u est strictement concave, sa dérivée est strictement décroissante. Comme $w_p < w_g$, $\epsilon > 0$ et $0 < \pi_H < 1$, on a bien $K > 0$. Ceci termine la preuve.

Les propriétés 1 et 2 impliquent que si $(\underline{w}^*, \bar{w}^*)$ est un contrat optimal, il est solution du système :

$$\begin{cases} \Delta\pi(u(\bar{w}) - u(\underline{w})) & = & \Delta d & (CI) \\ \pi_H u(\bar{w}) + (1 - \pi_H)u(\underline{w}) & = & u_r + d_H & (CP) \end{cases}$$

Ce système ayant une seule solution, le contrat optimal est unique. Il est donné par

$$\begin{cases} \underline{u}^* := u(\underline{w}^*) & = & u_r + d_H - \pi_H \frac{\Delta d}{\Delta\pi} \\ \bar{u}^* := u(\bar{w}^*) & = & u_r + d_H + (1 - \pi_H)\frac{\Delta d}{\Delta\pi} \end{cases}$$

où encore

$$\begin{cases} \underline{w}^* & = & u^{-1}\left(u_r + d_H - \pi_H \frac{\Delta d}{\Delta\pi}\right) & < & u^{-1}(u_r + d_H) \\ \bar{w}^* & = & u^{-1}\left(u_r + d_H + (1 - \pi_H)\frac{\Delta d}{\Delta\pi}\right) & > & u^{-1}(u_r + d_H) \end{cases}$$

Comparaison avec le cas de l'effort observable

Pour mémoire, $u^{-1}(u_r + d_H)$ est le salaire fixe donné à l'agent dans le cas où l'effort est observable. Dans le cas effort inobservable, le salaire en cas de réussite du projet est donc plus élevé que dans le cas observable, et le salaire en cas d'échec plus faible.

En moyenne le salaire espéré est strictement plus élevé quand l'effort n'est pas observable que quand il l'est. En effet, puisque la contrainte de participation est saturée, c'est que l'agent obtient son utilité de réserve. Comme il fait face à un risque, et qu'il a une aversion stricte pour le risque, ceci implique que son salaire espéré est strictement plus élevé que le salaire fixe qui lui donnerait son utilité de réserve, c'est à dire que le salaire qu'il obtient lorsque l'effort est observable.[12]

[12] Les arguments précédents sont entièrement rigoureux, mais on peut aussi vérifier par le calcul que le salaire espéré de l'agent est plus élevé lorsque l'effort n'est pas observable : la contrainte de participation étant saturée, on a $\pi_H u(\bar{w}^*) + (1 - \pi_H)u(\underline{w}^*) = u_r + d_H$. Comme u est strictement concave, ceci implique $u(\pi_H \bar{w}^* + (1 - \pi_H)\underline{w}^*) > u_r + d_H$. Comme la fonction u est strictement croissante, la fonction u^{-1} l'est aussi, si bien qu'en composant par u^{-1} on obtient $\pi_H \bar{w}^* + (1 - \pi_H)\underline{w}^* > u^{-1}(u_r + d_H) = w_H$. Or w_H est le salaire fixe reçu par l'agent lorsque l'effort est observable.

Le principal devant payer à l'agent une prime de risque pour induire l'effort élevé, il se peut qu'il décide de ne pas le faire si l'effort n'est pas observable, alors qu'il l'aurait fait s'il avait pu observer l'effort ; il se peut également, dans le cas où induire l'effort faible n'est pas profitable, que le principal ne puisse pas proposer à l'agent un contrat acceptable : aucun échange ne se fait alors, alors qu'un échange aurait été possible si l'on avait pu contracter sur l'effort. C'est un exemple d'inefficacité engendrée par une asymétrie d'information.

Supposons que dans le cas où l'effort est observable, le principal souhaite induire l'effort élevé. Le contrat optimal en effort inobservable donne alors la même utilité à l'agent que lorsque l'effort est observable (son utilité de réserve), mais une utilité moindre au principal. On parle d'optimum de second rang, par opposition à l'optimum de premier rang obtenu lorsque l'effort est observable.

5.4.4 Pour bien comprendre

Vérifier et commenter les points suivants (on compare le cas de l'effort observable au cas de l'effort inobservable, pour les mêmes utilités, probabilités de réussite du projet, etc.) :

a) si le projet n'est pas profitable quand l'effort est observable, alors il n'est pas profitable quand l'effort n'est pas observable.

b) il se peut que le projet soit profitable quand l'effort est observable, mais qu'il ne le soit pas quand l'effort n'est pas observable

c) si le principal décide d'induire l'effort élevé quand l'effort n'est pas observable, alors quand l'effort est observable, il décide également d'induire l'effort élevé.

d) il se peut que le principal décide d'induire l'effort élevé si l'effort est observable, mais pas si l'effort n'est pas observable

e) si le principal décide d'induire l'effort faible lorsque l'effort est observable, alors il décide également d'induire l'effort faible lorsque l'effort n'est pas observable, et obtient le même profit

f) que l'effort soit observable ou non, l'agent obtient la même espérance d'utilité (pas forcément le même salaire moyen, mais la même espérance d'utilité) : son utilité de réserve.

6 Situation de référence 2 : effort inobservable mais agent neutre au risque

Puisque l'agent est neutre au risque, on peut supposer que $u(w) = w$. Le meilleur contrat induisant l'effort élevé est celui qui minimise le salaire versé à l'agent :

$$\pi_H \bar{w} + (1 - \pi_H)\bar{w}$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{ll} (CI) & \Delta\pi(\bar{w} - \underline{w}) \geq \Delta d \\ (CP) & \pi_H \bar{w} + (1 - \pi_H)\underline{w} - d_H \geq u_r \end{array}$$

D'après (CP), le salaire moyen versé à l'agent doit être d'au moins $d_H + u_r$. Il est ici possible d'inciter l'agent à faire l'effort élevé en lui versant exactement ce salaire moyen : il suffit de choisir $\bar{w} - \underline{w}$

suffisamment grand, plus grand que $\Delta d/\Delta\pi$. Cela fait courir un risque important à l'agent, mais ce n'est pas un problème puisque l'agent au neutre au risque. On en déduit que n'importe quel contrat $(\underline{w}, \bar{w})$ tel que :

$$\begin{cases} \pi_H\bar{w} + (1-\pi_H)\underline{w} = u_r + d_H \\ \bar{w} - \underline{w} \geq \frac{\Delta d}{\Delta\pi} \end{cases}$$

est optimal (au sens du meilleur contrat parmi ceux induisant la participation et l'effort élevé). Tout autre contrat soit ne respecterait pas la contrainte d'incitation, soit coûterait plus cher au principal : il n'y a donc pas d'autres contrats optimaux.[13]

Remarques :

1) L'utilité du principal et celle de l'agent sont les mêmes que lorsque l'effort est observable : comme l'agent est neutre au risque, il n'y a plus de conflit entre incitation et aversion pour le risque de l'agent, et l'optimum de premier rang est restauré.

2) le lecteur vérifiera que la condition sous laquelle le principal préfère induire l'effort élevé que l'effort faible est la même que lorsque l'effort est observable, à savoir :

$$\Delta\pi\Delta q \geq \Delta d$$

3) Parmi les contrats optimaux, deux sont particulièrement intéressants. D'une part, celui qui sature la contrainte d'incitation, car c'est celui qu'on obtient comme cas limite du cas où l'agent a de l'aversion pour le risque. D'autre part, celui qui donne un profit fixe au principal, i.e. qui vérifie $\bar{q} - \bar{w} = \underline{q} - \underline{w}$. Ce contrat serait toujours optimal si le principal avait de l'aversion pour le risque. Il vérifie la contrainte d'incitation si et seulement si $\Delta\pi\Delta q \geq \Delta d$, c'est à dire si et seulement si le principal préfère induire l'effort élevé que l'effort faible.

Ce contrat s'interprète comme une franchise : le principal vend le projet à l'agent au prix correspondant à la rentabilité du projet si l'agent fait l'effort élevé et laisse ensuite l'agent choisir son effort comme il le souhaite. C'est l'agent qui assume tous les risques.

[13] Attention : pour simplifier, on parle souvent de "contrat optimal" pour désigner le meilleur contrat induisant la participation et l'effort élevé ; toutefois, il ne faut jamais oublier qu'il se peut que le principal prêfère induire l'effort faible ou ne puisse pas proposer de contrat rentable pour lui et acceptable par l'agent.

7 Calcul du meilleur contrat induisant l'effort élevé à l'aide du Lagrangien

Le problème principal agent standard à deux niveaux d'efforts et deux niveaux de production est suffisament simple pour qu'on puisse le résoudre armé de notre seule intuition ; pour des problèmes plus complexes, nous aurons besoin des techniques classiques d'optimisation sous-contraintes (Lagrangien, Kuhn et Tucker). Pour vous familiariser avec ces techniques, nous redémontrons que dans le meilleur contrat induisant l'effort élevé les contraintes d'incitation et de participation sont saturées, mais cette fois à partir des conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker. Ces conditions sont rappelées dans l'appendice B.

Nous considérons le problème de la section (5). Nous voulons montrer que la contrainte d'incitation et la contrainte de participation sont saturées dans toute solution du problème :

$$\max_{(\underline{w},\bar{w})\in\mathbb{R}^2} \pi_H(\bar{q}-\bar{w}) + (1-\pi_H)(\underline{q}-\underline{w})$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{ll} (CI) & \Delta\pi(u(\bar{w})-u(\underline{w})) - \Delta d \geq 0 \\ (CP) & \pi_H u(\bar{w}) + (1-\pi_H)u(\underline{w}) - (u_r + d_H) \geq 0 \end{array}$$

7.1 Résolution sans changement de variable

Le Lagrangien associé au problème est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{w},\underline{w},\lambda,\mu) = \pi_H(\bar{q}-\bar{w}) &+ (1-\pi_H)(\underline{q}-\underline{w}) \\ &+ \lambda\left[\Delta\pi(u(\bar{w})-u(\underline{w})) - \Delta d\right] + \mu\left[\pi_H u(\bar{w}) + (1-\pi_H)u(\underline{w})\right] \end{aligned}$$

En admettant que les contraintes sont toujours qualifiées, la condition nécessaire d'optimalité du 1er ordre est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{w}} & = & -\pi_H + \lambda\,\Delta\pi\,u'(\bar{w}) + \mu\pi_H u'(\bar{w}) = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underline{w}} & = & -(1-\pi_H) - \lambda\,\Delta\pi\,u'(\underline{w}) + \mu(1-\pi_H)u'(\underline{w}) = 0 \end{array}\right.$$

qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{1}{u'(\bar{w})} & = & \mu + \lambda\dfrac{\Delta\pi}{\pi_H} & (*) \\ \dfrac{1}{u'(\underline{w})} & = & \mu - \lambda\dfrac{\Delta\pi}{1-\pi_H} & (**) \end{array}\right.$$

Il faut bien sûr adjoindre à ces équations les conditions de positivité des multiplicateurs $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, et les conditions de complémentarité [$\lambda = 0$ ou (CI) est saturée] et [$\mu = 0$ ou (CP) est saturée].

Si on avait $\lambda = 0$, on obtiendrait $\bar{w} = \underline{w}$ et la contrainte d'incitation ne serait pas satisfaite. Donc $\lambda > 0$, et la contrainte d'incitation est saturée. De plus, si la contrainte de participation n'était pas saturée, on pourrait diminuer $\underline{w}$ et donc payer moins cher l'agent tout en continuant à satisfaire les contraintes. Le contrat ne serait donc pas optimal. Donc la contrainte de participation est saturée.

7.2 Résolution avec changement de variable.

Dans la section précédente, nous avons montré que, dans tout contrat optimal les contraintes (CI) et (CP) sont saturées. Toutefois, nous n'avons pas montré qu'il existe un contrat optimal ! Le problème est que l'ensemble des contrats $(\bar{w}, \underline{w})$ qui satisfont (CI) n'est pas forcément convexe, si bien que la condition necessaire d'optimalité du premier ordre n'est pas suffisante. De ce fait, même s'il existe un unique contrat qui sature à la fois (CI) et (CP), nous ne pouvons pas a priori en déduire que ce contrat est optimal. Ce problème se posait aussi dans la section 5.[14]

Pour contourner cette difficulté, il est utile de voir le problème dans l'espace des utilités, i.e. de faire le changement de variable $\bar{u} = u(\bar{w})$, $\underline{u} = u(\underline{w})$. Ceci transforme le problème initial en un problème de maximisation d'une fonction concave sous contraintes linéaires, pour lequel les conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn et Tucker sont suffisantes. De plus, cela simplifie les calculs et la représentation graphique des contraintes.

On notera ci-dessous $h = u^{-1}$. Notons que les hypothèses $u' > 0$, $u" < 0$ impliquent $h' > 0$, $h" > 0$. Dans l'espace des utilités, le problème de maximisation se réécrit sous la forme :

$$\max_{(\underline{u},\bar{u})\in\mathbb{R}^2} \pi_H(\bar{q} - h(\bar{u})) + (1-\pi_H)(\underline{q} - h(\underline{u}))$$

sous les contraintes

$$\begin{array}{ll} (CI) & \Delta\pi(\bar{u} - \underline{u}) - \Delta d \geq 0 \\ (CP) & \pi_H \bar{u} + (1-\pi_H)\underline{u} - (u_r + d_H) \geq 0 \end{array}$$

Le Lagrangien associé à ce problème est :

$$\mathcal{L}(\bar{u}, \underline{u}, \lambda, \mu) = \pi_H(\bar{q} - h(\bar{u})) + (1-\pi_H)(\underline{q} - h(\underline{u})) + \lambda\left[\Delta\pi(\bar{u} - \underline{u}) - \Delta d\right] + \mu\left[\pi_H \bar{u} + (1-\pi_H)\underline{u})\right]$$

La condition d'optimalité du premier ordre est donc

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{u}} & = & -\pi_H h'(\bar{u}) + \lambda\Delta\pi + \mu\pi_H = 0 & (*) \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underline{u}} & = & -(1-\pi_H)h'(\underline{u}) - \lambda\Delta\pi + \mu(1-\pi_H) = 0 & (**) \end{array}\right.$$

qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcll} h'(\bar{u}) & = & \mu + \lambda\dfrac{\Delta\pi}{\pi_H} & (*) \\ h'(\underline{u}) & = & \mu - \lambda\dfrac{\Delta\pi}{1-\pi_H} & (**) \end{array}\right.$$

En raisonnant comme dans la section précédente (en remplaçant $1/u'(w)$ par $h'(u)$), on montre que dans tout contrat optimal, les contraintes de participation et d'incitation sont saturées. En prime, puisqu'il s'agit maintenant d'un problème de maximisation d'une fonction concave sous contraintes linéaires, tout contrat qui sature (CI) et (CP) (et pour lequel on peut trouver des multiplicateurs λ et μ positifs) est optimal.

[14] Pour comprendre ce point subtil, considérons le problème de maximisation sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = x^2$. Il s'agit d'un problème de maximisation sans contrainte et la fonction objectif est dérivable. De ce fait, si x^* maximise f, alors $f'(x^*) = 0$. Or il existe un unique réel x tel que $f'(x) = 0$, à savoir $x = 0$. On pourrait être tenter d'en déduire que $x^* = 0$ maximise $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$, ce qui serait évidemment faux. Le problème est qu'il n'y a pas de maximum. Dans notre contexte, un problème similaire se produirait si l'agent avait du goût pour le risque. On pourrait démontrer que dans tout contrat optimal (CI) et (CP) sont saturées et qu'il y a un unique contrat saturant (CI) et (CP). Toutefois, ce contrat serait le pire des contrats satisfaisant (CI) et (CP), et non le meilleur ! Ceci parce que, quand l'agent a du goût pour le risque, et que le principal est neutre au risque, il est toujours préférable de faire courir à l'agent encore plus de risques.

8 Extension : 2 niveaux d'efforts, n niveaux de production

On suppose maintenant qu'il y a n niveaux de production possibles : $q_1 < q_2 < ... < q_n$. Un contrat devient un n-uplet de salaires w_1,...,w_n, où w_i est le salaire de l'agent si la producton est q_i. On note π_{iH} (resp. π_{iB}) la probabilité que la production soit de q_i si l'agent fait l'effort H (resp. B). On suppose $\pi_{iH} > 0$ pour tout i et on pose $\Delta\pi_i = \pi_{iH} - \pi_{iB}$. Comme il n'y a toujours que deux niveaux d'efforts, on garde deux contraintes : la contrainte d'incitation et la contrainte de participation. Elle s'écrivent maintenant :

$$
\begin{aligned}
&(CI) \qquad && \sum_{i=1}^{n} \pi_{iH} u(w_i) - d_H \geq \sum_{i=1}^{n} \pi_{iB} u(w_i) - d_B \\
&(CP) \qquad && \sum_{i=1}^{n} \pi_{iH} u(w_i) - d_H \geq u_r
\end{aligned}
$$

Le meilleur contrat induisant l'effort élevé est la solution du problème

$$\max_{w_1,...,w_n} \sum_{i=1}^{n} \pi_{iH}(q_i - w_i)$$

sous les contraintes (CI) et (CP). En notant λ (resp. μ) le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incitation (resp. de participation) on montre que la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre est :

$$\frac{1}{u'(w_i)} = \mu + \lambda \frac{\pi_{iH} - \pi_{iB}}{\pi_{iH}} \quad \text{pour tout } i \text{ dans } \{1, 2, ..., n\}.$$

Si $\lambda = 0$ on obtient $w_1 = w_2 = ... = w_n$ et la contrainte d'incitation n'est pas satisfaite. Donc à l'optimum $\lambda > 0$ et la contrainte d'incitation est saturée. La contrainte de participation est également saturée. Sinon, on pourrait diminuer légèrement tous les w_i de manière à diminuer tous les $u(w_i)$ d'une même constante ; on obtiendrait ainsi un contrat moins coûteux et satisfaisant toujours les contraintes.

Une question intéressante est de savoir si le salaire doit être croissant avec la production. Puisque u est concave et $\lambda > 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
w_i \geq w_j \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{u'(w_i)} \geq \frac{1}{u'(w_j)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi_{iH} - \pi_{iB}}{\pi_{iH}} \geq \frac{\pi_{jH} - \pi_{jB}}{\pi_{jH}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi_{iB}}{\pi_{iH}} \leq \frac{\pi_{jB}}{\pi_{jH}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi_{iH}}{\pi_{iB}} \geq \frac{\pi_{jH}}{\pi_{jB}}
\end{aligned}
$$

La quantité

$$\frac{\pi_{iH}}{\pi_{iB}} = \frac{Prob(q_i|e = H)}{Prob(i|e = L)} = \frac{\text{vraisemblance de } q_i \text{ sous l'effort } H}{\text{vraisemblance de } q_i \text{ sous l'effort } B}$$

s'appelle le rapport ou quotient de vraisemblance. Les calculs précédents montrent que le salaire ne croît pas nécessairement avec la production, mais avec le rapport de vraisemblance. L'intuition est simple : le principal cherche à inciter l'agent à faire l'effort élevé, et pour cela il ne faut pas rémunérer les production élevées mais les productions qui indiquent que l'agent a fait l'effort élevé. Toutefois, le rapport de vraisemblance croit souvent avec la production (en d'autres termes, plus la production est élevée, plus cela indique que l'agent a fait un effort élevé) ; le salaire augmentera alors avec la production.

Pour comprendre ce que signifie le rapport de vraisemblance, imaginez que vous pensiez a priori que l'agent fera l'effort H avec probabilité p et l'effort B avec probabilité $1-p$. Si vous observez la production q_i, votre nouvelle croyance (faites-le calcul !) sera que l'agent a fait l'effort H avec une probabilité $p' = Prob(H|q_i)$ telle que $\frac{p'}{1-p'} = \frac{p}{1-p}\frac{\pi_{iH}}{\pi_{iB}}$. La nouvelle croyance p' sera donc d'autant plus élevée que le rapport de vraisemblance est grand. En d'autres termes, plus le rapport de vraisemblance $\frac{\pi_{iH}}{\pi_{iB}}$ est grand, plus la production q_i indique un effort élevé.

9 Extension : contrainte de responsabilité limitée

Dans le modèle de base, nous avons supposé que n'importe quel contrat $(\bar{w}, \underline{w})$ était envisageable. Il était notamment possible que le salaire versé à l'agent soit négatif. Ce n'est pas toujours une hypothèse irréaliste. Ainsi, un propriétaire de terrien peut louer ses terres à un agriculteur pour une somme fixée, l'agriculteur recevant la récolte. Si la valeur de la récolte est moindre que le coût de location des terres, la rémunération globale du paysan est négative. De même lorsqu'une chaîne de magasins (principal) vend à un manager (agent) le droit d'exploiter un magasin, le manager recevant les profits du magasin.[15]

Toutefois, dans d'autres contextes, la rémunération de l'agent doit toujours être supérieure à une rémunération minimum w_{min} : soit pour des raisons légales, soit parce que l'agent refuse tout contrat qui lui fait courir le risque d'obtenir une rémunération inférieur à w_{min}. Dans un modèle à deux niveaux d'efforts et n niveaux de production, le meilleur contrat induisant l'effort elevé est alors celui qui maximise le profit du principal sous les contraintes d'incitations et de participation classiques et les contraintes “de responsabilité limitée"

$$(CRL) \qquad w_i \geq w_{min} \quad \text{pour tout } i \text{ dans } \{1, 2, ..., n\}$$

La contrainte de participation peut être impliquée par les autres contraintes et peut donc être satisfaite strictement. On a toutefois le résultat suivant :

Dans le meilleur contrat induisant l'effort élevé :

a) si aucune des contraintes de responsabilité limitée n'est saturée, alors la contrainte de participation l'est.

b) la contrainte d'incitation est saturée.

[15] On appelle contrat de franchise ce type de contrat, où l'agent paie une somme fixe au principal et garde la production en échange. Un contrat de franchise est parfaitement incitatif, mais fait courir un risque important à l'agent. Dans notre modèle de base, un contrat de franchise est un contrat tel que le profit du principal est indépendant de la production : $\bar{q} - \bar{w} = \underline{q} - \underline{w}$

L'intuition est la suivante :

a) Supposons que dans un contrat optimal, la contrainte de participation et les contrainte de responsabilité limitée soient satisfaites strictement. On peut alors diminuer légèrement les w_i de manière à diminuer tous les $u(w_i)$ d'une constante. Si la diminution est légère, (CP) et (CRL) seront toujours satisfaites, et comme les écarts $u(w_i) - u(w_j)$ n'ont pas changé, (CI) sera toujours satisfaite également. On a donc obtenu un contrat qui satisfait les contraintes et rapporte davantage au principal. Ceci contredit l'optimalité du contrat initial.

b) Par l'absurde, supposons qu'il existe un contrat optimal dans lequel (CI) n'est pas saturée. On peut alors trouver un contrat qui, tout en satisfaisant toujours (CI), donne à l'agent le même salaire moyen mais lui fait courir moins de risque : il suffit d'augmenter légèrement le salaire le plus faible et de diminuer le plus élevé en conservant le même salaire moyen. Pour ce nouveau contrat, (CP) sera satisfaite strictement car l'agent court moins de risque ; les contraintes (CRL) seront aussi satisfaites strictement car le salaire le plus faible a augmenté. De plus, puisque ce nouveau contrat satisfait les contraintes et donne le même salaire moyen à l'agent que le contrat optimal dont on est parti, il est également optimal ; mais c'est impossible, car d'après a), dans un contrat optimal, (CP) et les contraintes (CRL) ne peuvent pas être toutes satisfaites strictement.

Remarque : quand on suppose que l'utilité apportée par la rémunération est de la forme $u(w) = \sqrt{w}$, on suppose implicitement que w est positif. Voir la remarque à la fin de l'appendice B.3.

10 Extension : n niveaux d'efforts

La méthode théorique de résolution peut se résumer ainsi : notons E l'ensemble des efforts possible. Pour tout effort possible $e \in E$, on calcule l'utilité espérée $u_P(e)$ qu'obtient le principal l'agent dans le meilleur contrat qui incite à l'effort e (si aucun contrat n'incite à l'effort e, on pose $u_P(e) = -\infty$). On détermine ensuite l'effort e^* qui maximise $u_P(e)$. Si $u_P(e^*)$ est plus grand que l'utilité de réserve du principal, il propose le meilleur contrat induisant l'effort e^* ; sinon, i.e. si $u_P(e^*)$ est plus petit que l'utilité de réserve du principal, il n'y a aucun échange possible entre l'agent et le principal. Cette méthode est en principe aussi valable lorsqu'il y a un continuum d'effort possibles, mais E étant alors infini, la résolution pratique pose des problèmes techniques qui ne seront pas exposés ici.

Attention, lorsqu'il y a plus de deux niveaux d'efforts, il est parfois impossible d'induire certains efforts. En effet, pour que l'agent choisisse un certain effort, il faut qu'il le préfère à tous les autres efforts. S'il y a n niveaux d'effort, il y aura donc $n-1$ contraintes d'incitations, qui peuvent être incompatibles.

Exemple : deux niveaux de production $\bar{q}$, et $\underline{q} < \bar{q}$. Trois niveaux d'efforts : B, M et H, qui donnent lieu a une production élevée avec des probabilités respectives $\pi_B \leq \pi_M \leq \pi_H$, et à une production faible avec la probabilité complémentaire. Pour que l'agent préfère l'effort moyen M aux autres efforts, il faut d'une part qu'il préfère M à B :

$$(CI-1) \quad \pi_M u(\bar{w}) + (1-\pi_M)u(\underline{w}) - d_M \geq \pi_L u(\bar{w}) + (1-\pi_L)u(\underline{w}) - d_L$$

et d'autre part qu'il préfère M à H :

$$(CI-2) \quad \pi_M u(\bar{w}) + (1-\pi_M)u(\underline{w}) - d_M \geq \pi_H u(\bar{w}) + (1-\pi_H)u(\underline{w}) - d_H$$

Ces conditions se réécrivent, en posant $\underline{u} = u(\underline{w})$ et $\bar{u} = u(\bar{w})$:

$$\begin{cases} (CI-1) & \bar{u}-\underline{u} \geq \dfrac{d_M - d_L}{\pi_M - \pi_L} \\ (CI-2) & \bar{u}-\underline{u} \leq \dfrac{d_H - d_M}{\pi_H - \pi_M} \end{cases}$$

Si l'on prend $\pi_H = 3/4$, $\pi_M = 1/2$, $\pi_L = 1/4$ et $d_H = 10$, $d_M = 8$, $d_L = 0$, on obtient $\frac{d_M - d_L}{\pi_M - \pi_L} = 32$ et $\frac{d_H - d_M}{\pi_H - \pi_M}$, si bien que les deux contraintes d'incitation sont incompatibles.

Pour bien comprendre :

1) Etant donné les valeurs numériques prises, est-il étonnant qu'on ne puisse pas induire l'effort moyen ? Eléments de réponse dans cette note de bas de page.[16]

2)Montrer que pour d'autres valeurs numériques (des probabilités et des désutilités), l'agent peut être incité à faire l'effort M. Montrer que pour n'importe quelle valeur numérique, tant que $\pi_B < \pi_M < \pi_H$, l'agent peut être incité à faire l'effort B et peut être incité à faire l'effort H.

A Rappels d'économie de l'incertain

1. Fonctions d'utilité. Considérons un agent qui a des préférences transitives sur un ensemble Z, fini ou infini, de "situations" possibles (une situation pouvant être un panier de bien, une loterie sur un panier de bien, le fait d'aller voir tel film au cinéma, etc.). On dit qu'une fonction $U : Z \to \mathbb{R}$ représente les préférences de l'agent sur Z si pour toutes situations z et z' dans Z, l'agent préfère faiblement z à z' si et seulement si $U(z) \geq U(z')$. Sans d'autres hypothèses que la transitivité des préférences, l'existence d'une telle fonction U n'est pas garantie. Si elle existe, elle n'est pas unique. En effet, si U représente les préférences de l'agent sur Z alors toute transformation strictement croissante de U (i.e. toute fonction $f \circ U$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante) représente également les préférences de l'agent. Une fonction représentant les préférences de l'agent est aussi appelée une fonction d'utilité de l'agent.

2. Loteries et utilités espérées. Un cas particulier important est celui où les préférences de l'agent portent sur des loteries sur un ensemble fini de résultats $I = \{r_1, ..., r_n\}$. En notant $\mathcal{L}$ l'ensemble des loteries sur I, la définition précédente s'applique en prenant $Z = \mathcal{L}$.

On dit qu'une fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ a la "forme d'une utilité espérée" s'il existe des réels u_1,...,u_n tels que, pour toute loterie $l = (p_1, ..., p_n) \in \mathcal{L}$, $U(l) = p_1 u_1 + ... + p_n u_n$. Ici, p_i est la probabilité sous l du résultat $r_i \in I$. Une fonction d'utilité ayant la forme d'une utilité espérée s'appelle aussi une fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern.

Deux questions se posent :

a) existe-il une fonction qui représente les préférences de l'agent sur les loteries (i.e. une fonction d'utilité) ?

b) en existe-t-il une qui ait la forme d'une utilité espérée ? En d'autres termes, est-il possible de définir une évaluation $u_i = u(r_i)$ du résultat r_i telle que l'espérance U de u représente les préférences

[16] Ici, faire l'effort moyen est presque aussi coûteux que faire l'effort élevé, mais améliore nettement moins la probabilité de succès. De ce fait, il n'est pas étonnant que l'agent n'ait jamais intérêt à faire l'effort moyen.

sur les loteries ? Cela serait très utile car cela permettrait de représenter les préférences sur l'ensemble infini des loteries à partir d'un nombre fini de données : les utilités des loteries certaines.

La réponse à la deuxième question est donnée par le théorème de l'utilité espérée :

Théorème : si les préferences sur $\mathcal{L}$ sont totales, transitives, et satisfont les axiomes d'indépendance et de continuité (que nous ne rappellerons pas ici), alors elles admettent une réprésentation qui a la forme d'une utilité espérée.

Dans tout le cours, on suppose que ces conditions sont satisfaites.

3. Loteries sur un ensemble continu. La théorie s'étend aux loteries sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, qu'on interprétera pour fixer les idées comme un ensemble de richesses finales possibles. $\mathcal{L}$ est alors l'ensemble des fonctions de distribution F sur I et on dit qu'une fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to I$ a la forme d'une utilité espérée s'il existe une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ telle que, pour toute fonction de distribution F, $U(F)$ est l'espérance de u sous F :

$$U(F) = \int_I u(w)dF(w)$$

Le théorème de l'utilité espérée s'énonce alors comme précédemment. D'autre part, on postule en général que $u(\cdot)$ est croissante et continue.

Il est important de distinguer la fonction $U(\cdot)$ définie sur les loteries et la fonction u définies sur les montants monétaires. En particulier, si U représente les préférences sur $\mathcal{L}$, alors pour toute fonction strictement croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V = f \circ U$ représente également les préférences sur $\mathcal{L}$. En revanche, si $U = E(u)$ représente les préférences sur $\mathcal{L}$, et $v = f \circ u$, il ne suffit pas que f soit strictement croissante pour que $E(v)$ représente les préférences sur $\mathcal{L}$: il faut de plus que f soit affine.

Souvent, on appelle $U(\cdot)$ la fonction de von Neumann-Morgenstern et $u(\cdot)$ la fonction de Bernoulli. Toutefois, la terminologie n'est pas standardisée et il est courant en théorie des jeux d'appeller $u(\cdot)$ la fonction de von Neumann-Morgenstern. L'important est d'être d'accord sur les résultats !

4. Attitude face au risque. Nous considérons ici le cas où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, un élément de I représentant une richesse finale possible pour l'agent ; nous supposons à partir de maintenant que l'agent préfère une richesse élevée à une richesse faible.

Un agent est neutre au risque s'il est indifférent entre toutes les loteries qui lui donne la même espérance de richesse finale. Un agent a de l'aversion pour le risque si pour n'importe quelle loterie l qui comporte un risque et d'espérance de gain $E_l(w)$, l'agent préfère recevoir la somme $E_l(w)$ à coup sûr que de participer à la loterie l. La somme EC_l telle que l'agent est indifférent entre recevoir EC_l à coup sûr et participer à la loterie l est l'*équivalent certain* de la loterie l. Pour n'importe quelle loterie l qui comporte un risque et pour n'importe quel agent qui a, strictement, de l'aversion pour le risque, $EC_l < E_l(w)$. La différence $E_l(w) - EC_l$ est la *prime de risque* associé à la loterie l (elle croît avec l'aversion au risque de l'agent).

Ce qu'il faut bien comprendre pour ce cours est la chose suivante : si l'on propose à un agent économique de ne pas recevoir un salaire fixe, mais un salaire variable qui dépend d'aléas qu'il ne contrôle pas complètement, cela lui fait courir un risque. Pour qu'un agent qui a de l'aversion pour le risque accepte de courir ce risque, il faut que ce risque soit rémunéré ; c'est à dire que le contrat permette à l'agent de recevoir un salaire espéré plus élévé que le salaire fixe qu'il pourrait se garantir par ailleurs.

5. Attidude face au risque et fonctions de Bernoulli. Si un agent est neutre au risque, ses préférences peuvent être représentées par l'espérance de la fonction de Bernoulli $u(w) = w$, ou de n'importe quelle transformation affine strictement croissante de w.

D'autre part, si les préférences de l'agent peuvent être représentées par l'espérance d'une fonction de Bernoulli u alors l'agent a (strictement) de l'aversion pour le risque si et seulement si u est (strictement) concave.

Attention : des fonctions de Bernoulli u et v concaves mais différentes correspondent à des préférences différentes (sauf si v est une transformation affine croissante de u).

B Rappels d'optimisation

B.1 Conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn et Tucker

Soient f, g_1, g_2,...,g_k, des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, qu'on suppose différentiables. Soit $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_j(\mathbf{x}) \geq 0, 1 \leq j \leq k\}$. On considère le problème de maximisation sous contrainte

$$\max_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Soit $\mathbf{x}^*$ un point de K *vérifiant la condition de qualification des contraintes* exposée dans la section B.2. Soit

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, ..., \lambda_k) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

le Lagrangien associé au problème.

Théorème (Kuhn et Tucker) : si $\mathbf{x}^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ est solution de (1), alors il existe des réels λ_1,...,λ_k tels que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*, \lambda_1, ..., \lambda_k) = 0 \text{ pour tout } i \text{ dans } \{1, ..., n\}$$

et pour tout j dans $\{1, ..., k\}$,

$$\begin{cases} \lambda_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \lambda_j \geq 0 \end{cases}$$

Les conditions ci-dessus sont des conditions *nécessaires* d'optimalité du premier ordre. En général, elles ne sont pas suffisantes (ce n'est pas parce que $\mathbf{x}^*$ vérifie les conditions ci-dessus qu'on est sûr que c'est un maximum local et encore moins que c'est un maximum global). Toutefois, *ces conditions sont suffisantes dans le cas où f est concave et l'ensemble K convexe* (une condition suffisante pour que K soit convexe est que les fonctions g_j soient concaves, ou quasi-concaves). Si de plus les fonctions g_j sont affines, il est inutile de vérifier la condition de qualification des contraintes.[17]

[17] Rappelons que les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves. Le cas g_j affine est donc un cas particulier du cas g_j concave.

Remarques :

i) la condition $\lambda_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ signifie que si $\lambda_j > 0$ alors la j-ième contrainte est saturée ($g_j(\mathbf{x}) = 0$), et que si la j-ième contrainte est satisfaite strictement ($g_j(\mathbf{x}) > 0$) alors $\lambda_j = 0$.

ii) le nombre λ_j est appelé “multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$".

iii) s'il s'agit d'un problème de minimisation, la condition $\lambda_j \geq 0$ est remplacée par $\lambda_j \leq 0$. De même, si l'on a écrit la j-ième contrainte sous la forme $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ au lieu de $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$. Le mieux est de connaître le théorème tel qu'il est énoncé ci-dessus et de s'y ramener en utilisant le fait que minimiser une quantité revient à maximiser son opposé et que $-g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ est équivalent à $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$.

B.2 Condition de qualification des contraintes

On considère le problème de maximisation (1). Soit $\mathbf{x} \in K$. Rappelons que le gradient de g_j en $\mathbf{x}$ est le vecteur $\overrightarrow{grad}\, g_j(\mathbf{x}) = (\partial g_j/\partial x_i)_{1\leq i\leq n}(\mathbf{x})$. Si $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, on notera $\mathbf{h}\cdot\overrightarrow{grad}\, g_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ le produit scalaire de $\mathbf{h}$ et $\overrightarrow{grad}\, g_j$. Enfin, on notera $J(\mathbf{x}) = \{j \in \{1, ..., k\}, g_j(\mathbf{x}) = 0\}$ l'ensemble des contraintes saturées en $\mathbf{x}$.

Définition : On dit que les contraintes sont qualifiées en $\mathbf{x}$ s'il existe une direction $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout j dans $J(\mathbf{x})$: $\mathbf{h}\cdot\overrightarrow{grad}\, g_j(\mathbf{x}) > 0$ ou [g_j est affine et $\mathbf{h}\cdot\overrightarrow{grad}\, g_j(\mathbf{x}) = 0$].

Quand toutes les contraintes sont affines, les contraintes sont automatiquement qualifiées : il suffit de prendre $\mathbf{h} = 0$.

Dans le cours de microéconomie 2, nous ne vous demanderons jamais de vérifier que les contraintes sont qualifiées. Ceci pour vous simplifier la vie, *mais la condition de qualification des contraintes est réellement importante*, comme le montre l'exemple suivant.

Considérons le problème :

$$\max_{\{x\in\mathbb{R}:g(x)\geq 0\}} f(x) \tag{2}$$

dont le Lagrangien associé est $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$. On supposera f et g différentiables. Le théorème de Kuhn et Tucker nous dit que *sous la condition de qualification des contraintes*, si x^* est solution de ce problème, alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x^*, \lambda) = 0$.

Considérons maintenant le cas $f(x) = -x$ et $g(x) = x^3$. La contrainte $g(x) \geq 0$ est équivalente à $x \geq 0$. Résoudre le problème (2) revient donc à chercher le maximum de la fonction $-x$ sur l'ensemble des $x \geq 0$. Ce maximum est bien sûr atteint en $x = 0$. Pourtant, on a $f'(0) = -1$ et $g'(0) = 0$. Il n'existe donc aucun réel λ tels que $f'(0) + \lambda g'(0) = 0$, c'est à dire tels que $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(0, \lambda) = 0$. Ceci ne contredit pas le théorème de Kuhn et Tucker. En effet, l'hypothèse de qualification des contraintes prend ici la forme $g'(0) \neq 0$ et elle n'est pas vérifiée.

B.3 Optimisation avec contraintes intuitivement sans importance

Dès qu'on rajoute des contraintes de responsabilités limitées, ou dans d'autres applications de l'optimisation à l'économie, on est amené à résoudre des problèmes d'optimisation sous un nombre important de contraintes. Souvent, il est clair que certaines de ces contraintes ne sont pas essentielles, au sens ou le problème d'optimisation a la même solution qu'on en tienne compte ou pas. Toutefois, dans quelle mesure est-il rigoureux de faire comme si ces contraintes n'existaient pas ? Le but de cette section est de répondre à cette question.[18]

Pour comprendre l'idée, commençons par un exemple simple : soit f une fonction, et (C1) et (C2) des contraintes. Considérons les problèmes de maximisation suivants :

Premier problème : maximiser $f(x)$ sous la contrainte (C1).
Second problème : maximixer $f(x)$ sous les contraintes (C1) et (C2).

Si x^* est solution du premier problème et satisfait (C2), x^* est aussi solution du second problème. En effet, x^* satisfait alors (C1) et (C2) et puisque $f(x^*) \geq f(x)$ pour tous les x satisfaisant (C1), on a aussi, a fortiori, $f(x^*) \geq f(x)$ pour tous les x satisfaisant (C1) et (C2). En revanche, si x^* ne satisfait pas (C2), ce ne peut pas être la solution du second problème.

Ce principe se généralise de manière évidente et donne une méthode pour résoudre rapidement des problèmes d'optimisation sous un grand nombre de contraintes :

1) En suivant son intuition économique, séparer les contraintes en deux groupes : celles qui semblent essentielles (groupe 1) et les autres (groupe 2).

2) Résoudre le problème d'optimisation en ne tenant compte que des contraintes du groupe 1.

3) Vérifier que la solution trouvée vérifie aussi les contraintes du groupe 2. Si c'est le cas, c'est la solution du problème global. Sinon, c'est que notre intuition était mauvaise, et il faut repartir en 1).

Remarque : dans les exercices, on prend souvent pour l'utilité dérivée du salaire : $u(w) = \sqrt{w}$. Implicitement, on suppose alors que les salaires doivent être positifs ou nuls. Pourtant, dans la correction, on ne tient en général pas compte de ces contraintes. Ceci est légitime car si l'on résout le problème sans tenir compte de ces contraintes et que la solution qu'on trouve les satisfait, c'est aussi la solution du problème d'optimisation complet (i.e. en tenant compte de ces contraintes). C'est ce qui se passe dans les exercices car nous n'avons pas pris les valeurs numériques au hasard. Toutefois, il suffirait qu'on change les valeurs numériques pour tomber sur des salaires optimaux négatifs. On conclurait alors qu'on ne peut pas négliger les contraintes de positivité des salaires et on devrait faire apparaître au moins certaines d'entre elles dans le Lagrangien.

[18] Par exemple dans un modèle avec 2 niveaux de production, $\bar{q}$ et $\underline{q} < \bar{q}$, et contraintes de responbilité limitée $\bar{w} \geq 0$, $\underline{w} \geq 0$, il est clair que la contrainte $\bar{w} \geq 0$ est inessentielle. Mais est-il rigoureux de faire comme si elle n'existait pas ?