

Compléments sur l'exercice 16 (ville linéaire) [erreurs dans le corrigé du polycopié]

Vocabulaire : les consommateurs consomment tous strictement si chacun préfère consommer à ne pas consommer ; les consommateurs consomment tous faiblement s'ils consomment tous mais que l'un d'entre eux est indifférent entre consommer et ne pas consommer.

Notations : $i \in \{0, 1\}$, $j = 1 - i$.

Hypothèse de bon sens : on supposera toujours p_0 et p_1 inférieurs à 1 (pourquoi, cher lecteur ?)

Il y a trois type d'équilibres envisageables :

i) **équilibre où les consommateurs consomment tous strictement** : dans ce cas, pour de petites variations des prix, les consommateurs continueraient à consommer tous. Les fonctions de demande seraient donc toujours donnés par

$$q_i = (p_j - p_i + 1)/2 \quad (1)$$

et les profits par :

$$\pi_i = \frac{1}{2}p_i(p_j - p_i + 1) \quad (2)$$

Pour qu'il n'y ait aucune petite déviation unilatérale profitable, il faut donc que (conditions nécessaire du premier ordre) $p_i = (1 + p_j)/2$, pour tout $i \in \{1, 2\}$. Ceci implique $p_0^* = p_1^* = 1$. On vérifie qu'à ces prix tout le monde consomme strictement si et seulement si $v > 3/2$. Ce type d'équilibre n'est donc possible que si $v > 3/2$.

Il reste à montrer que si $v > 3/2$, $p_0^* = p_1^* = 1$ est bien un équilibre. On voit facilement qu'il n'y a pas de déviations profitable vers un prix plus bas. En effet, un prix plus bas amènerait à rester dans le domaine où les demandes sont données par (1) et dans ce domaine, $p_i = 1$ est l'unique meilleure réponse à $p_j = 1$.

Il reste donc à montrer qu'il n'y a pas (pour fixer les idées, les firmes sont symétriques) une déviation de la firme 0 vers un prix p_0 tellement élevé que les consommateurs ne consomment plus tous strictement, et que la demande est donc donnée par $q_i = v - p_i$ et le profit par

$$\pi_i = p_i(v - p_i) \quad (3)$$

comme si la firme i était un monopole.

On montre qu'un tel prix devrait vérifier $p_0 \geq 1 + p_1^* - v = 2 - v$. Or pour $v > 3/2$, $2 - v$ est plus élevé que le prix de monopole $p_0^M = v/2$ (le prix que la firme 0 choisirait si elle était en monopole). De ce fait, parmi les prix $p_0 \geq 2 - v$, celui qui donne le profit le plus élevé est le plus faible (celui qui s'approche le plus du prix de monopole), à savoir $p_0 = 2 - v$. Mais pour $p_0 = 2 - v$, cas limite entre "tout le monde consomme" et "certains ne consomment pas", le profit de la firme 0 est AUSSI donné par (2). Il est donc inférieur avec $p_0 = 2 - v$ qu'avec $p_0 = 1$. Il n'y a donc pas de déviations profitables.

Conclusion : un équilibre où tout le monde consomme strictement est nécessairement du type $p_0 = p_1 = 1$ et ne peut exister que si $v > 3/2$. Réciproquement, pour $v > 3/2$, $p_0 = p_1 = 1$ est bien un équilibre, et on vérifie aisément que tout le monde consomme alors strictement.

ii) **équilibre où certains consommateurs ne consomment pas** : dans ce cas, pour de petites variations de prix, certains consommateurs continuent à ne pas consommer, et les profits restent donnés par (3). Les conditions nécessaires du premier ordre impliquent $p_0^* = v/2 = p_1^*$. On vérifie qu'à ces prix, il est vrai que certains consommateurs ne consomment pas si et seulement si $v < 1$. Ce type d'équilibre ne peut donc exister que si $v < 1$.

Réciproquement, supposons que $v < 1$ et que, pour fixer les idées, la firme 1 choisit le prix $p_1 = v/2$. En choisissant le prix $p_0 = v/2$, la firme 0 obtient son profit de monopole : le plus grand profit qu'elle puisse obtenir dans l'absolu, et donc aussi étant donné la stratégie (le prix) de l'autre. Donc $p_0 = p_1 = v/2$ est bien un équilibre.

Conclusion : un équilibre où certains consommateurs ne consomment pas n'existe que pour $v < 1/2$, et il est alors donné par $p_0 = p_1 = v/2$.

iii) **équilibre où tout le monde consomme, mais pas strictement** : supposons pour simplifier qu'il n'existe que des équilibres symétriques, i.e. tels que $p_0^* = p_1^* = p^*$ (je n'ai pas vérifié, mais j'y crois très fort). Un équilibre symétrique où tout le monde consomme mais pas strictement est tel que le consommateur $1/2$ (qui à cause de l'hypothèse $p_0^* = p_1^*$ est le moins intéressé par consommer) est indifférent entre consommer et ne pas consommer. Ceci implique $v = 1/2 + p^*$ soit $p^* = v - 1/2$. On vérifie que pour $1 \leq v \leq 3/2$, c'est bien un équilibre, et qu'il se raccorde continûment aux autres équilibres.

Remarque 1 : pour vérifier que $p_0 = p_1 = v - 1/2$ est un équilibre, on vérifie que contre $p_j^* = v_1/2$:

a) parmi les prix - relativement faibles - tels que tout le monde consomme [et donc tels que les profits sont donnés par (2)], la firme i préfère le prix p_i le plus grand possible (le plus proche possible de $(1 + p_j^*)/2$), et c'est $p_i^* = v - 1/2$.

b) parmi les prix - relativement élevés - tels qu'il n'est pas vrai que tout le monde consomme strictement [les profits sont donc donnés par (3)], la firme i préfère le prix p_i le plus petit possible (le plus proche possible de $p_i^M = v/2$), et c'est $p_i^* = v - 1/2$.

Notons que la raison pour laquelle, en a), on ne trouve pas $p_i = (1 + p_j)/2$, est qu'à ce prix certains consommateurs ne consommeraient pas, et que l'expression (2) du profit n'est donc plus valable.

Remarque 2 : le modèle de différenciation spatiale sur un segment avec coûts linéaires présentent des discontinuités lorsque les firmes ne sont pas placées aux extrémités du segment (parce que si on attire un consommateur placé de l'autre côté de la concurrente, on les attire tous). En revanche, il n'y a pas à ma connaissance de discontinuités quand les firmes sont contraintes à se situer aux extrémités.

Conclusion générale (interprétation économique) : il y a trois régimes.

1) v très faible : $v < 1$. Dans ce cas les firmes sont en situation de monopole locaux et agissent comme tels : $p_0 = p_1 = v/2$

2) v intermédiaire : $1 \leq v \leq 3/2$. Les firmes ne sont plus des monopoles locaux, car un monopole attirerait plus de la moitié de la demande. Paradoxalement, cela se traduit par des prix d'équilibres $p_0 = p_1 = v - 1/2$ plus élevés que le prix de monopole. Ceci est dû au phénomène suivant : si la firme 0 abaisse son prix unilatéralement de, disons, $v - 1/2$ à $v - 1/2 - \varepsilon$, l'augmentation de sa demande sera moitié moins grande que si elle était en monopole (augmentation de $\varepsilon/2$ au lieu de ε). En effet, la moitié des consommateurs qui deviennent plus intéressés par acheter à la firme 0 que ne pas acheter restent encore plus intéressés par acheter à la firme 1. De ce fait, une baisse de prix est moins intéressante que pour un monopole, et cela pousse les prix à la hausse !

3) v grand : $v > 3/2$. Les prix d'équilibres atteignent la valeur de 1 et la concurrence grandit. Pour des prix $p_0 = p_1 = p$ plus élevés, diminuer unilatéralement son prix de ε coûte $\varepsilon/2$ (baisse de recettes sur la quantité $1/2$ qu'on vendait avant la baisse) mais rapporte au premier ordre $p\varepsilon/2$ (nouvelles recettes dues à l'augmentation de la demande de $\varepsilon/2$). Pour $p > 1$, baisser son prix unilatéralement serait donc rentable et des prix d'équilibre plus élevés que 1 ne sont donc pas soutenable. Les prix d'équilibre cessent donc de monter et se stabilisent à $p_0 = p_1 = 1$. Notons que tant que $v < 2$, ces prix restent plus élevés que celui que pratiquerait un monopole.