Examen de Mai 2012

Durée 2h. Documents et appareils électroniques (calculatrices, téléphones,...) interdits.
Barême (sur 23 points) approximatif. Enoncé recto-verso.

Les fonctions désignées par des lettres minuscules sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans tout l'énoncé, solution veut dire solution maximale.

Exercice 1 *(3 pts) (aucune justification demandée)* Soit K un réel. On considère l'équation différentielle :

$$x'(t) = x(t)(x(t) - K)e^{-x(t)}$$

En fonction de la valeur de K :

a) donner le portrait de phase ;

b) dire si l'équilibre $x = 0$ est stable, asymptotiquement stable ou instable ;

c) donner $\lim_{t\to+\infty} x(t)$, où $x(\cdot))$ est l'unique solution maximale telle que $x(0) = 2$ (on admet que cette solution est globale).

Exercice 2 *(3 pts)* Pour la matrice A suivante, déterminer l'ensemble des solutions de $X'(t) = AX(t)$ et donner l'allure du portrait de phase :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dans le problème (page suivante), la question 1) est utile pour la question 2c) et la 2b) est implicitement utilisée dans toute la suite. Pour le reste, les trois parties sont indépendantes.

Problème (17,5 pts)

Partie 1. Etude d'un système linéaire. (3pts)

Soit $C \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations différentielles suivant, noté (E1) :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) - Cy(t) \end{cases}$$

1) Montrer qu'il y a un unique équilibre. En fonction de la valeur de C, dire s'il est stable, asymptotiquement stable ou instable. Pour $C \notin \{-2, 2\}$, dire s'il s'agit d'une source, d'une source spirale, d'un puits, d'un puits spirale, ou d'un centre.

Partie 2. Etude d'un système non linéaire. (8pts)

Soit $C \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations différentielles suivant, noté (E2) :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\sin(x(t)) - Cy(t) \end{cases}$$

2a) Montrer que pour tout $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution maximale de (E2) telle que $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$.

2b) Montrer que toutes les solutions maximales sont globales.

2c) Déterminer les équilibres de (E2). Pour les équilibres $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$, étudier la stabilité du système linéarisé et dire ce qu'on peut en déduire pour le système initial.

2d) On suppose $C > 0$. Soit $D \in \mathbb{R}$. Montrer que les solutions de $z'(t) = -Cz(t) + D$ tendent vers D/C quand $t \to +\infty$.

2e) Soit $(x(\cdot), y(\cdot))$ une solution de (E2) telle que $y(\cdot)$ ait une limite en $+\infty$. A l'aide d'un principe de comparaison, déduire du 2d) que si $C > 0$, alors :

$$-1/C \leq \lim_{t \to +\infty} y(t) \leq 1/C$$

Partie 3. Etude du cas $C = 0$. (6,5pts) Dans toute cette partie, on suppose que $C = 0$. Le système (E2) prend donc la forme suivante, notée (E3) :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\sin(x(t)) \end{cases}$$

Soit $(x(\cdot), y(\cdot))$ une solution de (E3). Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$L(x, y) = 1 - \cos x + \frac{1}{2}y^2$$

3a) Montrer que L est constante le long des trajectoires ($L(x(t), y(t))$ ne dépend pas de t).

3b) En déduire que $(0, 0)$ est stable mais pas asymptotiquement stable.

3c) Montrer que si (x, y) est un équilibre alors $L(x, y) = 0$ ou $L(x, y) = 2$.

3d) On suppose que $0 < L(x(0), y(0)) < 2$. Montrer que $(x(\cdot), y(\cdot))$ est bornée et que $(x(t), y(t))$ n'a pas de limite quand $t \to +\infty$.

3e) (difficile) On suppose que $x(0) = 0$ et que $y(0) = 2$. Montrer que $x(t) \to_{t \to +\infty} \pi$.