Examen de systèmes différentiels - Mai 2013

Durée 2h. Documents et appareils électroniques (calculatrices, téléphones,...) interdits.
Barême (sur 22 points [sur 25 points au final]) approximatif. Enoncé recto-verso.
On pourra traiter les exercices dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 (2pts) Sans justifier, donner l'allure du portrait de phase pour le système $X'(t) = AX(t)$ dans les cas suivants :

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad 3)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (8,5 pts) On considère le système différentiel suivant, noté (S) :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + (x^2(t) - 1)y(t) \end{cases} \qquad (S)$$

On remarquera que (0,0) est un équilibre de (S)

1) (1,5pt) Déterminer le système linéarisé de (S) en (0,0). Déterminer la nature (point-selle, source, etc.) et la stabilité de l'origine pour ce système linéarisé. Que peut-on en déduire sur la stabilité de (0,0) pour (S) ?

2) (3,5 pts) On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ le disque ouvert de centre (0, 0) et de rayon 1. On pose $L(x,y) = x^2 + y^2$ et $\dot{L}(x,y) = \nabla L(x,y) \cdot F(x,y)$ avec $F_1(x,y) = y$ et $F_2(x,y) = -x + (x^2 - 1)y$. Soit $(J, X(\cdot))$ une solution maximale de (S) définie en 0 et telle que $X(0) \in D$.

2a) Montrer que $\dot{L} \leq 0$ sur D. En déduire que pour tout $t \in [0, \sup J[$, $L(X(t)) \leq L(X(0))$, puis que $\sup J = +\infty$.

2b) On pose $V(x,y) = x^2 + xy + y^2$ et $\dot{V}(x,y) = \nabla V(x,y) \cdot F(x,y)$. On admet que $\dot{V} \leq -(1 - L)V$ sur $\mathbb{R}^2$. En déduire qu'il existe un réel $a > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $V(X(t)) \leq e^{-at} V(X(0))$, puis que $X(t) \to (0,0)$ quand $t \to +\infty$.

3) (2,5pts) Soit $(J, (\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot)))$ une solution définie en 0 telle que $\bar{x}(0) > 2$ et $\bar{y}(0) > 1$. Montrer que $\bar{x}'(0) > 0$ et $\bar{y}'(0) > 0$, puis que $\bar{x}(t)$ et $\bar{y}(t)$ tendent vers $+\infty$ en $\sup J$ si $\sup J = +\infty$.

4) (1pt) D'après un théorème du cours, lorsqu'un système différentiel admet une fonction de Lyapunov globale et coercive, toutes les solutions sont définies et bornées au voisinage de $+\infty$. La fonction L est-elle coercive ? Comment expliquer le résultat de la question 3) ?

Exercice 3 (3pts) On note (E) le système différentiel $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 3te^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité d'ordre 3 et on pose $N = A - I$.

1) Montrer que N est nilpotente, et calculer e^{tA} pour tout réel t.

2) Déterminer la solution de (E) nulle en $t = 0$.

Exercice 4 (8,5 pts) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $T > 0$. On suppose que f est T-périodique par rapport à la première variable t, c'est à dire $f(t+T, x) = f(t, x)$ pour tout réels t et x. On suppose aussi que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t, a) > 0 \text{ et } f(t, b) < 0.$$

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{E}$$

1) (4,5pts) Soient y_0 et $\tilde{y}_0$ des éléments de $[a, b]$. Soient $(J, y(\cdot))$ et $(J, \tilde{y}(\cdot))$ les solutions maximales de (E) telles que, respectivement, $y(0) = y_0$ et $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$.

1a) Montrer que $y(t) \in]a, b[$ pour tout $t \in]0, \sup J[$. En déduire que $\sup J = +\infty$.

1b) Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que f est K-Lipschitzienne par rapport à la seconde variable x sur $[0, T] \times [a, b]$.

1c) Sur $[0, T]$ on pose $z(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$. Montrer que sur $[0, T]$,

$$|z(t)| \leq |z(0)| + \int_0^t K|z(s)|ds$$

2) (2pts) Soit $\varphi_T : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction associant à chaque $y_0 \in [a, b]$ la valeur au temps T de la solution de (E) valant y_0 en $t = 0$. Déduire de la question précédente que φ_T est continue sur $[a, b]$. En déduire l'existence d'un $y_0 \in [a, b]$ tel que $\varphi_T(y_0) = y_0$.

3) (2pts) (difficile à rédiger) Soient $(J, y(\cdot))$ une solution maximale de (E) définie en 0 et en T, et telle que $y(T) = y(0)$. Montrer que $J = \mathbb{R}$ et que $y(\cdot)$ est T-périodique.