Correction de l'examen de systèmes différentiels du 13 mai 2013

Les questions qui ont été plutôt bien traitées ont été : les exercices 1 et 3, les questions 1) et 4) de l'exercice 2, et la fin de la question 1a) de l'exercice 4. En revanche, certaines questions qui devraient être à la portée de tous ont été mal faites : par exemple, montrer que $\bar{y}'(0) > 0$ dans la question 3), ou répondre aux questions 1b) et 1c) de l'exercice 4. La rédaction de la question 1c) était souvent très imprécise (c'est à dire fausse : par exemple, $|z(t)| - |z(0)|$ n'est pas en général l'intégrale de 0 à t de la valeur absolue de z' !).

La question 2b) de l'exercice 2) était également faisable, en comprenant que L était une fonction et pas un réel, et qu'écrire : "on pose $a = 1 - L$ " n'a pas de sens.

Les questions suivantes étaient plus difficiles : question 2a) et fin de la question 3) dans l'exercice 2, début de la question 1a) et questions 2) et 3) dans l'exercice 4. Toutefois, dans la question 2a) de l'exercice 2 et la question 1a) de l'exercice 4, il s'agissait de réutiliser les techniques vues au TD1 pour montrer qu'une fonction reste dans une certaine zone, et ceci avait été vu et revu, donc cela me paraissait faisable. C'est en tout cas un point à revoir.

Globalement, ce qui m'embête le plus n'est pas que vous n'avez pas assimilé tous les points du cours. C'est que vous écriviez sans vergogne des choses très fausses. Hypothèse favorable : vous êtes en mode panique totale pendant l'examen. Hypothèse plus gênante : vous ne savez pas quand votre raisonnement est correct ou pas, même quand vous avez le temps. Ceci serait très insatisfaisant car c'est sans doute très désagréable pour vous d'avoir l'impression de ne jamais bien comprendre le cours, et que d'autre part un des objectifs majeurs d'une formation en mathématiques est d'apprendre à raisonner, et en particulier à savoir quand ce qu'on a produit est un raisonnement complet ou une simple esquisse à compléter. Troisième hypothèse, vous vous dites que l'enseignant ne mettra pas de points négatifs et que vous n'avez rien à perdre. Dans ce cas vous avez tort ; d'une part, parce que vous feriez mieux de répondre à peu près correctement à certaines questions, et obtenir les points qui vont avec, que de gratter des copies doubles qui ne vous rapportent rien ; d'autre part car je récompense ceux qui écrivent peu de choses violemment fausses dans leur copies et je peux à l'occasion mettre des points négatifs (par exemple quand vous calculez le carré d'une matrice non diagonale en mettant au carré tous les coefficients : je suis cardiaque, j'ai des enfants, ayez pitié de moi).

A partir de l'examen de juillet 2013, il est probable que je corrige ainsi : en plus des points que vous obtenez en répondant aux questions, vous partez avec un capital de 2 points (hors barème) que vous perdez entièrement ou partiellement si vous écrivez des choses très fausses.

Exercice 1 Voir cours. Pour retrouver le portrait de phase, on peut raisonner ainsi pour le 1) : la matrice est diagonale avec des valeurs propres strictement positives. C'est donc une source et les axes du repère canonique sont des directions propres. Comme les valeurs propres sont distinctes, les trajectoires dans le premier cadran sont soit des courbes de type "racine", soit des courbes de type "carré" (i.e. similaire au graphe de $t \rightarrow t^2$). Comme la valeur propre associée au vecteur $(0, 1)$ est plus grande que la valeur propre associée au vecteur propre $(1, 0)$, quand $t \rightarrow +\infty$, $y(t)$ augmente plus vite que $x(t)$ et les trajectoires sont donc des courbes de type

“carré”. Bien sûr il faut faire figurer les flèches indiquant la direction du mouvement sur les trajectoires représentatives, et sur les axes.

Le 2) s’obtient à partir du 1) en inversant le sens des flèches (pourquoi, au fait ?), et le 3) s’obtient à partir du 1) par symétrie par rapport à la première bissectrice du plan. Ces raisonnements étaient à faire dans votre tête : aucune justification n’étant demandée.

Exercice 2 1) Le système linéarisé est :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases} \quad (SL)$$

c’est à dire $X'(t) = AX(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Notons $T = \text{Tr}A$ et $D = \det A$. On a $T = -1 < 0$, $D = 1 > 0$ et $\Delta = T^2 - 4D = 1 - 4 = -3 < 0$. Les valeurs propres sont donc complexes conjuguées, car $\Delta < 0$, et à parties réelles strictement négative (égales à $-1/2$), car $T = -1$. Il s’agit d’un foyer stable (aussi appelé puits-spirale), asymptotiquement stable. Cet équilibre est hyperbolique, donc l’équilibre $(0,0)$ de (S) est également asymptotiquement stable.

2a) On a $\dot{L}(x, y) = 2xy + 2y[-x + (x^2 - 1)y] = 2y(x^2 - 1)$, donc $\dot{L}(x, y) \leq 0$ si $x^2 \leq 1$ et en particulier sur D . Soit $t \in [0, \sup J[$. Supposons que sur $[0, t[$, on a $L(X(s)) < 1$, c’est à dire $X(s) \in D$. Alors sur $[0, t[$, on a $\frac{d}{ds}L(X(s)) = \dot{L}(X(s)) \leq 0$ car $X(s) \in D$. Donc $L(X(t)) \leq L(X(0)) < 1$. Donc d’après un argument vu dans le premier TD, $L(X(t)) \leq 0$ pour tout $t \in [0, \sup J[$. Le raisonnement précédent montre alors que sur $[0, \sup J[$, on a $L(X(t)) \leq L(X(0)$, donc $\|X(t)\|_2 \leq \|X(0)\|_2$. Donc par le critère de non-explosion, $\sup J = +\infty$.

2b) Notons déjà que $V(x, y) \geq (x^2 + y^2)/2 \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Puis, soit $a = 1 - L(X(0))$. On a $a > 0$ car $X(0) \in D$. De plus, d’après 2a), pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $L(X(t)) \leq L(X(0))$ donc $-(1 - L(X(t))) \leq -a$, donc $\dot{V}(X(t)) \leq -aV(X(t))$, donc $v(t) \leq -av(t)$ où $v(t) = V(X(t))$. Par le principe de comparaison, $v(t) \leq w(t)$ sur $\mathbb{R}_+$, où $w(\cdot)$ est la solution de $w'(t) = -aw(t)$ telle que $w(0) = v(0)$, i.e., $w(t) = e^{-at}v(0)$. On a donc $v(t) \leq e^{-at}v(0)$, i.e. $V(X(t)) \leq e^{-at}V(X(0))$. Ceci implique que $V(X(t)) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Comme $V(x, y) \geq (x^2 + y^2)/2$, on a donc $X(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

3) On a $\bar{x}'(0) = \bar{y}(0) > 1 > 0$. Par ailleurs, $\bar{y}'(0) = -\bar{x}(0) + (\bar{x}^2(0) - 1)\bar{y}(0)$. Or si $x \geq 2$ et $y \geq 1$ alors

$$-x + (x^2 - 1)y \geq -x + x^2 - 1 \geq -x + 2x - 1 \geq x - 1 > 1$$

donc $\bar{y}'(0) > 1 > 0$.

Le calcul précédent montre que si $\bar{x}(s) > 2$ et $\bar{y}(s) > 1$ sur $[0, t[$, alors $\bar{x}(\cdot)$ et $\bar{y}(\cdot)$ sont croissantes sur $[0, t[$, si bien que $\bar{x}(t) \geq \bar{x}(0) > 2$ et de même $\bar{y}(t) > 1$. Un raisonnement vu au premier TD implique donc que $\bar{x}(t) > 2$ et $\bar{y}(t) > 1$ sur $[0, \sup J[$. Le calcul initial indique alors

que sur cet intervalle, $\bar{x}'(t) > 1$, donc $\bar{x}(t) \geq 2 + t$. De même, $\bar{y}'(t) > 1$ donc $\bar{y}(t) > 1 + t$. En supposant $\sup J = +\infty$, $\bar{x}(t)$ et $\bar{y}(t)$ tendent donc vers $+\infty$ en $\sup J$.

Remarque : en fait, $\sup J < +\infty$ (indice : dériver la première équation et en utilisant la seconde intelligemment, étudier l'évolution de $\ln x$).

4) L est évidemment coercive, mais L n'est pas une fonction de Lyapunov globale (elle décroît le long des trajectoire qui sont dans D , mais pas le long de toutes les trajectoires). Donc le résultat du cours mentionné ne s'applique pas.

Exercice 3 1) On vérifie que $N^3 = 0$. Donc $A = I + N$ avec I diagonale, N nilpotente, et bien sûr $IN = NI$. On a donc $e^{tA} = e^{tI}e^{tN}$. Comme $e^{tI} = e^t I$ et $e^{tN} = I + tN + \frac{1}{2}(tN)^2$, on obtient

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 3t & 1 & 2t + 3t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) La formule de Duhamel donne :

$$X(t) = e^{tA} \left(0 + \int_0^t e^{-sA} B(s) \right).$$

Or $e^{-sA} B(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $X(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 1a) Si $y_0 = a$, alors $y'(0) = f(0, a) > 0$ par hypothèse, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y(t) \in]a, b[$ sur $]0, \varepsilon[$. C'est évidemment également vrai si $y_0 \in]a, b[$, et encore vrai si $y_0 = b$ par un raisonnement analogue. Supposons par l'absurde qu'il existe $t \in]0, \sup J[$ tel que $y(t) \notin]a, b[$. Soit $T = \inf\{t > 0 \mid y(t) \notin]a, b[\}$. Comme $y(t) \in]a, b[$ sur $]0, \varepsilon[$, on a $T > 0$, et par continuité de $y(\cdot)$, on a $y(T) = a$ ou $y(T) = b$. Supposons $y(T) = a$, le second cas étant similaire. On a alors $y'(T) = f(T, a) > 0$. Donc il existe $t \in]0, T[$ (arbitrairement proche de T) tel que $y(t) < y(T) = a$. En particulier, $y(t) \notin]a, b[$. Ceci contredit la définition de T . Donc $y(t) \in]a, b[$ sur $[0, \sup J[$. La fonction $y(\cdot)$ est donc bornée sur $[0, \sup J[$. D'après l'alternative d'explosion, ceci implique que $\sup J = +\infty$.

1b) Comme f est C^1 , ses dérivées partielles sont continues et donc bornées sur $[0, T] \times [a, b]$ par compacité de cet ensemble. Il existe donc un réel K tel que sur $[0, T] \times [a, b]$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)| \leq K$. Par l'inégalité des accroissements finis, les fonctions partielles $x \rightarrow f(t, x)$ sont donc K -Lipschitziennes sur $[a, b]$ pour tout $t \in [0, T]$.

1c) Comme $y(\cdot)$ est solution de (E) on a pour tout $t \geq 0$: $y(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y(s)) ds$, et de même $\tilde{y}(t) = \tilde{y}(0) + \int_0^t f(s, \tilde{y}(s)) ds$. En faisant la différence on obtient :

$$z(t) = z(0) + \int_0^t [f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))] ds.$$

d'où pour $t \geq 0$:

$$|z(t)| \leq |z(0)| + \int_0^t |f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))| ds.$$

Or pour $s \in [0, T]$,

$$|f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))| \leq K|y(s) - \tilde{y}(s)| = K|z(s)|.$$

En utilisant cette majoration dans la formule précédente, on obtient le résultat voulu.

2) L'inégalité de la question 1c) et le lemme de Gronwall impliquent que $|z(T)| \leq |z(0)|e^{KT}$, ce qu'on peut réécrire :

$$|\varphi_T(y_0) - \varphi_T(\tilde{y}_0)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0|e^{KT}.$$

La fonction φ_T est donc Lipschitzienne de rapport e^{KT} , et en particulier continue (résultat vu en cours). De plus, d'après 1a), φ_T prend ses valeurs dans $]a, b[$, donc $\varphi_T(a) > a$ et $\varphi_T(b) < b$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliquée à la fonction $y_0 \rightarrow \varphi(y_0) - y_0$ implique donc qu'il existe $y_0 \in]a, b[$ tel que $\varphi_T(y_0) - y_0 = 0$, i.e. $\varphi_T(y_0) = y_0$.

3) Intuitivement, ce qui se passe est que, le champ de vecteurs étant T -périodique, si $y(T) = y(0)$, la solution repart et $t = T$ du même point qu'en $t = 0$ et est soumise aux mêmes "forces" sur $[T, 2T]$ que sur $[0, T]$, et donc va se comporter de la même manière, et ainsi de suite. Ceci étant vu, comment formaliser ?

Solution 1 (esquisse), la plus proche de l'idée ci-dessus : si jamais l'énoncé dit vrai, alors $y(\cdot)$ est égale à la fonction $\tilde{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in [0, T[$, $\tilde{y}(kT + t) = y(t)$. On introduit donc cette fonction, et on montre en utilisant la périodicité qu'elle est bien solution de (E); le point délicat est de ne pas oublier de vérifier que $\tilde{y}(\cdot)$ est bien dérivable en T , i.e. qu'il n'y a pas de problème de raccordement.

Comme $\tilde{y}(\cdot)$ est une solution globale, c'est une solution maximale. Donc $y(\cdot)$ et $\tilde{y}(\cdot)$ sont deux solutions maximales de (E) qui coïncident en $t = 0$, donc elle sont égales. Ceci implique que $J = \mathbb{R}$ et que $y(\cdot)$ est T -périodique.

Solution 2 : soit $\hat{y} : \hat{J} =]\inf J + T, \sup J + T[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $t \in \hat{J}$, $\hat{y}(t) = y(t - T)$. La fonction $\hat{y}(\cdot)$ est dérivable sur $\hat{J}$ et pour tout $t \in \hat{J}$,

$$\hat{y}'(t) = y'(t - T) = f(t - T, y(t - T)) = f(t - T, \hat{y}(t)) = f(t, \hat{y}(t))$$

où l'on a utilisé, dans l'ordre, la définition de $\hat{y}(\cdot)$, le fait que $y(\cdot)$ est solution de (E), à nouveau la définition de $\hat{y}(\cdot)$, et le fait que f est T -périodique. Le couple $(\hat{J}, \hat{y}(\cdot))$ est donc solution de (E). De plus, $\hat{y}(0) = y(0)$. Par maximalité de $y(\cdot)$, on donc $\hat{J} \subset J$ et pour tout $t \in \hat{J}$, $y(t) = \hat{y}(t) = y(t - T)$. Soit $s \in J$. On a $s + T \in \hat{J}$, donc $y(s + T) = y(s + T - T) = y(s)$. Donc $y(\cdot)$ est T -périodique sur J . Comme $y(\cdot)$ est continue, ceci implique que $y(\cdot)$ est bornée, et donc que $J = \mathbb{R}$ par l'alternative d'explosion. Ceci termine la preuve.