Exercice 8 :

1) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto x_0$.
Si $f(x_0) = 0$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$f(y(t)) = f(x_0) = 0 = y'(t)$ donc $(\mathbb{R}, y(\cdot))$ est une solution globale donc maximale ~~du~~ problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Or $(J, x(\cdot))$ aussi donc, f étant C^1, par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, $(J, x(\cdot)) = (\mathbb{R}, y(\cdot))$ donc $J = \mathbb{R}$ et $x(\cdot)$ est stationnaire.

En revanche si $f(x_0) \neq 0$ alors $x'(t_0) = f(x_0) \neq 0$ donc $x(\cdot)$ n'est pas stationnaire.

2) ~~Soit $t_1 \in J$~~ Supposons qu'il existe $t_1 \in J$ tel que $x'(t_1) = 0$. Alors en posant $x_1 = x(t_1)$ on a $f(x_1) = 0$. En appliquant le 1) à (t_1, x_1) au lieu de (t_0, x_0), on obtient le résultat voulu.

~~3) Comme f est C^1, les solutions de (E) sont C^2 donc C^1 donc leur dérivée est continue.~~

3) Soit $(J, x(\cdot))$ une solution de E. Il y a deux cas :

Cas 1 : il existe $t \in J$ tel que $x'(t) = 0$. Dans ce cas, d'après 2), $x(\cdot)$ est stationnaire donc monotone (au sens faible).

Cas 2 : pour tout $t \in J$, $x'(t) \neq 0$. Dans ce cas, comme $x(\cdot)$ est au moins C^2 donc C^1 (car f est C^1) donc $x'(\cdot)$ est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, $x'(t)$ est soit toujours strictement positive soit toujours strictement négative. Donc $x(\cdot)$ est strictement monotone.

4) Les solutions stationnaires sont périodiques. Réciproquement si $(\mathbb{R}, x(\cdot))$ est ~~périodique~~ une solution périodique, il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $x(T) = x(0)$. Comme $x(\cdot)$ est C^1, il existe $t \in]0, T[$ tel que $x'(t) = 0$ (Théorème de Rolle). Donc d'après 2), $x(\cdot)$ est stationnaire.

Pour une équation différentielle non autonome : même si $d = 1$, les solutions peuvent être périodique sans être stationnaires. Ainsi $(\mathbb{R}, t \mapsto \sin t)$ est solution de $x'(t) = \cos t$!

Pour une équation différentielle autonome avec $d = 2$:

$X(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ est solution sur $\mathbb{R}$.

de $\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$ c'est à dire $X'(t) = F(X(t))$ avec $F(x, y) = (-y, x)$.

Or $X(\cdot)$ est périodique mais non stationnaire.

Exercice 9 :

a) Vu en cours

b) b1) Supposons que $x(t) \xrightarrow[t \to b_1]{} +\infty$. Si $b_2 > b_1$, alors $y(b_1)$ est bien défini et $[t_0, b_1[\subset J_1 \cap J_2$ donc sur $[t_0, b_1[$, $x(t) < y(t)$. Or $x(t) \xrightarrow[t \to b_1]{} +\infty$ donc $y(t) \xrightarrow[t \to b_1]{} +\infty$, contredit ~~$y(b_1)$~~ $y(\cdot)$ définie en b_1.

Donc $b_2 \leq b_1$.

Si $b_2 = b_1$, le même argument que ci-dessus montre que $y(t) \xrightarrow[t \to b_2]{} +\infty$

Si $b_2 < b_1$, alors $b_2 < +\infty = \sup I$ (où I est l'intervalle de définition (en temps) de f). Donc par l'alternative d'explosion $|y(t)| \xrightarrow[t \to b_2]{} +\infty$ donc (car $d = 1$), $y(t) \xrightarrow[t \to b_2]{} +\infty$ ou $y(t) \xrightarrow[t \to b_2]{} -\infty$

Or $[t_0, b_2[\subset J_1 \cap J_2$, donc sur $[t_0, b_2[$, $x(t) < y(t)$.
$x(b_2)$ définie

donc $\liminf_{t \to b_2} y(t) \geq \liminf_{t \to b_2} x(t) = x(b_2) \in \mathbb{R}$.

Donc on ne peut pas avoir $y(t) \xrightarrow[t \to b_2]{} -\infty$, donc $y(t) \xrightarrow[t \to b_2]{} +\infty$.

b2) Argument similaire à celui du b1)

c). Non: on peut très ~~bien avoir~~ $b_2 > b_1$ et $y(t) \underset{t \to b_2}{\not\to} +\infty$

si $x(t) \xrightarrow[t \to b_1]{} -\infty$. Exemple:

Equation: $u'(t) = -u^2(t)$.

$\left( ]-\infty, 1[, x: t \mapsto \frac{1}{1-t} \right)$ et $\left(\mathbb{R}, y: t \mapsto 0 \right)$

sont solutions maximales et $x(0) < y(0)$, mais $b_2 = +\infty > 1 = b_1$

et $y(t) \underset{t \to b_2}{\not\to} +\infty$

En revanche si $x(\cdot)$ est croissante, on ne peut pas avoir

$x(t) \xrightarrow[t \to b_1]{} -\infty$ donc si $b_1 < +\infty$, par l'alternative

d'explosion, $x(t) \xrightarrow[t \to b_1]{} +\infty$ donc par b1), $b_2 < +\infty$

d) D'après le cours, sur $J = J \cap J_1 = J \cap J_2$ on a

$x(t) < z(t)$ et $z(t) < y(t)$. donc $|z(t)| \leq w(t)$

où $w: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto \max(|x(t)|, |y(t)|)$. Comme w est continue,

par application du critère de non explosion, $J = \mathbb{R}$, i.e.

$z(\cdot)$ est globale. Comme $z(t) \in]x(t), y(t)[$ sur J, on

a $z(t) \in]x(t), y(t)[$ sur $\mathbb{R}$.