

**Enoncé.** On considère le problème de Cauchy  $x'(t) = 3(x(t))^{\frac{2}{3}}$  avec  $x(0) = 0$ .

a) Montrer que la fonction nulle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et la fonction  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $x(t) = t^3$  sont deux solutions maximales de ce problème. Cela contredit-il le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

b) Déterminer l'ensemble des solutions maximales du problème.

**Solution.** Pour le a), il suffit de dériver. Pour le b) on va montrer la proposition suivante.

**Proposition.** Les solutions maximales sont les fonctions  $x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfont les propriétés (i) et (ii) ci-dessous : <sup>1</sup>

(i) soit  $x(t) = 0$  sur  $\mathbb{R}_+$ , soit il existe  $t_+ \in \mathbb{R}_+$  tel que  $x(t) = 0$  sur  $[0, t_+]$  et  $x(t) = (t - t_+)^3$  sur  $[t_+, +\infty[$

(ii) soit  $x(t) = 0$  sur  $\mathbb{R}_-$ , soit il existe  $t_- \in \mathbb{R}_-$  tel que  $x(t) = 0$  sur  $[t_-, 0]$  et  $x(t) = (t - t_-)^3$  sur  $] -\infty, t_-]$ .

**Preuve.** Pour montrer que toutes les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant (i) et (ii) sont solutions, c'est du simple calcul. Ces solutions sont maximales parce qu'elles sont globales. Il reste à montrer qu'il n'y a pas d'autre solutions maximales.

Il suffit de prouver les deux propriétés suivantes :

(i') toute solution maximale est définie sur un intervalle contenant  $\mathbb{R}_+$  et vérifie (i) ;

(ii') toute solution maximale est définie sur un intervalle contenant  $\mathbb{R}_-$  et vérifie (ii).

On va uniquement prouver la propriété (i'), la preuve de (ii') est symétrique.

Considérons une solution maximale  $(J, x(\cdot))$  du problème de Cauchy de l'énoncé.

Supposons pour l'instant que la solution est globale :  $J = \mathbb{R}$ . Comme  $x'(t) = (x(t))^{2/3} \geq 0$  pour tout  $t$ , la fonction  $x(\cdot)$  est croissante. Comme de plus  $x(0) = 0$ , on a  $x(t) \geq 0$  pour tout  $t \geq 0$ . Donc soit  $x(t) = 0$  sur  $[0, +\infty[$  (donc (i) est vérifiée) soit il existe  $t_+ \in [0, +\infty[$  tel que  $x(t) = 0$  sur  $[0, t_+]$  et  $x(t) > 0$  sur  $]t_+, +\infty[$ . Dans ce dernier cas, on montre par la méthode de séparation des variables qu'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $t \in ]t_+, +\infty[$ ,  $x(t) = (t + C)^3$ . La continuité à gauche de  $x(\cdot)$  en  $t_+$  implique  $x(t_+) = 0$  (sauf si  $[0, t_+ = \emptyset$  mais alors  $t_+ = 0$  et  $x(t_+) = 0$  par hypothèse). La continuité à droite implique  $C = -t_+$ . Finalement,  $x(t) = 0$  sur  $[0, t_+]$  et  $x(t) = (t - t_+)^3$  sur  $[t_+, +\infty[$ , donc (i) est vérifiée.

Supposons maintenant  $J$  quelconque et posons  $\beta = \sup J \in \bar{\mathbb{R}}$ . On montre de même que soit  $x(t) = 0$  sur  $J \cap \mathbb{R}^+$  (cas 1) soit il existe  $t_+ \in J \cap \mathbb{R}_+$  tel que  $x(t) = 0$  sur  $[0, t_+]$  et  $x(t) = (t - t_+)^3$  sur  $J \cap [t_+, +\infty[$ . Si  $\beta < +\infty$ , on peut prolonger la solution (en une solution du problème de Cauchy) en posant : pour tout  $t \in [\sup J, +\infty[$ ,  $x(t) = 0$  dans le cas 1, et  $x(t) = (t - t_+)^3$  dans le cas 2. Cela contredit la maximalité de la solution initiale. Donc  $\beta = +\infty$ , ce qui termine la preuve de (i').

<sup>1</sup>Le graphe de ces fonctions se dessine ainsi : pour les temps positifs, on part du point  $(0,0)$ , on avance horizontalement le long de l'axe des  $t$  et soit on va jusqu'à  $+\infty$ , soit on décolle en un certain  $t_+ \geq 0$  et à partir de là, à une translation près, le graphe est celui de  $t \rightarrow t^3$ . Pour les temps négatifs, c'est symétrique.

**Comment trouve-t-on ?** On se rend compte que  $x(\cdot)$  est croissante, continue et que par séparation des variables,  $x(\cdot)$  se comporte comme  $t^3$  sur les intervalles où  $x(t)$  ne s'annule pas. On se rend compte que les solutions sont globales car sinon on pourrait les prolonger. Enfin, on se rend compte qu'il faut distinguer le cas où  $x(t)$  est toujours nul pour  $t \geq 0$  du cas où la fonction "décolle" de 0, et même chose pour les  $t$  négatifs, si bien qu'il y a quatre formes de fonctions solutions possibles. On se demande comment l'expliquer de manière concise, et on aboutit, par exemple, à l'énoncé de la proposition. Puis on la prouve proprement.

### Annexe : autre version de la fin de la preuve.

Considérons une solution maximale  $(J, x(\cdot))$  du problème de Cauchy de l'énoncé. Pour fixer les idées, on suppose que  $J$  est ouvert et peut donc s'écrire  $J = ]\alpha, \beta[$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ . Les autres cas se traitent de manière identique.

Comme  $x'(t) = (x(t))^{2/3} \geq 0$  sur tout  $J$ , la fonction  $x(\cdot)$  est croissante sur  $J$ . Comme de plus  $x(0) = 0$ , on a  $x(t) \geq 0$  sur  $[0, \beta[$ . Donc soit (cas 1)  $x(t) = 0$  sur  $[0, \beta[$  soit (cas 2)  $J_+ = \{t \in J, x(t) > 0\} \neq \emptyset$ .

Dans le cas 1, on a forcément  $\beta = +\infty$ . Sinon, on pourrait prolonger strictement la solution (sous-entendu : en une solution du problème de Cauchy de l'énoncé définie sur un intervalle strictement plus grand) en posant  $x(t) = 0$  sur  $[\beta, +\infty[$  ; cela contredirait la maximalité de la solution initiale. La fonction  $x(\cdot)$  est donc bien définie sur un intervalle contenant  $\mathbb{R}_+$ , et par définition du cas 1,  $x(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ , donc (i) est satisfait.

Dans le cas 2, soit  $t^* \in J_+$  et soit  $J_0 = \{t \in [0, \beta[, x(t) = 0\}$ . Les ensembles  $J_0$  et  $J_+$  sont des intervalles par croissance de la fonction  $x(\cdot)$ . L'intervalle  $[0, \beta[$  est la réunion disjointe de ces deux intervalles. De plus, la borne supérieure  $t_+$  de  $J_0$  est bien définie, dans  $J$  car dans  $[0, t^*]$ , et dans  $J_0$  par continuité de  $x(\cdot)$ . On a donc  $J_0 = [0, t_+]$  et  $J_+ = ]t_+, \beta[$ . On montre par la méthode de séparation des variables qu'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $t \in ]t_+, \beta[$ ,  $x(t) = (t + C)^3$ . Par continuité de  $x(\cdot)$  en  $t_+$ , on a forcément  $C = -t_+$  et donc  $x(t) = (t - t_+)^3$  sur  $]t_+, \beta[$ . De plus, on a forcément  $\beta = +\infty$ . Sinon, on pourrait prolonger strictement la solution en posant  $x(t) = (t - t_+)^3$  pour tout  $t \in [\beta, +\infty[$ . On a bien montré que la fonction  $x(\cdot)$  est définie sur un intervalle contenant  $\mathbb{R}_+$  et vérifie (i), ce qui termine la preuve.