**UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE**

**______ CYCLE**

Le candidat inscrit ici très lisiblement ses

Nom : VIOSSAT

Prénoms : YANNICK

N° GROUPE :

Numéro de convocation :

ANNÉE : 2011-12 SESSION : Mai

MATIÈRE : Systèmes différentiels

UV = ----------------

1/2

*Il est interdit aussi bien de signer à la fin de la composition que d'indiquer son nom ou son numéro sur les feuilles intercalaires.*

N° de groupe :

Nombre d'intercalaires : 1

| | Note | Signature | Note finale | APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE |
|---|---|---|---|---|
| er correcteur | | | 20 | Copie remarquable, quoique pas toujours très lisible. |
| e correcteur | | | | |

Ne pas écrire dans cette marge

Sujet :

Exercice 1 :

a) b) Cas 1 : $K<0$ $\rightarrow \underset{K}{|} \leftarrow \underset{0}{|} \rightarrow$ 0 instable

Cas 2 : $K=0$ $\rightarrow \underset{K=0}{|} \rightarrow$ 0 instable

Cas 3 : $K>0$ $\rightarrow \underset{0}{|} \leftarrow \underset{K}{|} \rightarrow$ 0 asymptotiquement stable.

c) Si $K<2$, $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Si $K=2$, $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2$.

Si $K>2$, $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Exercice 2 : Soit $X_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. $X_1$ est visiblement vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$. De plus,

$$(A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0$$

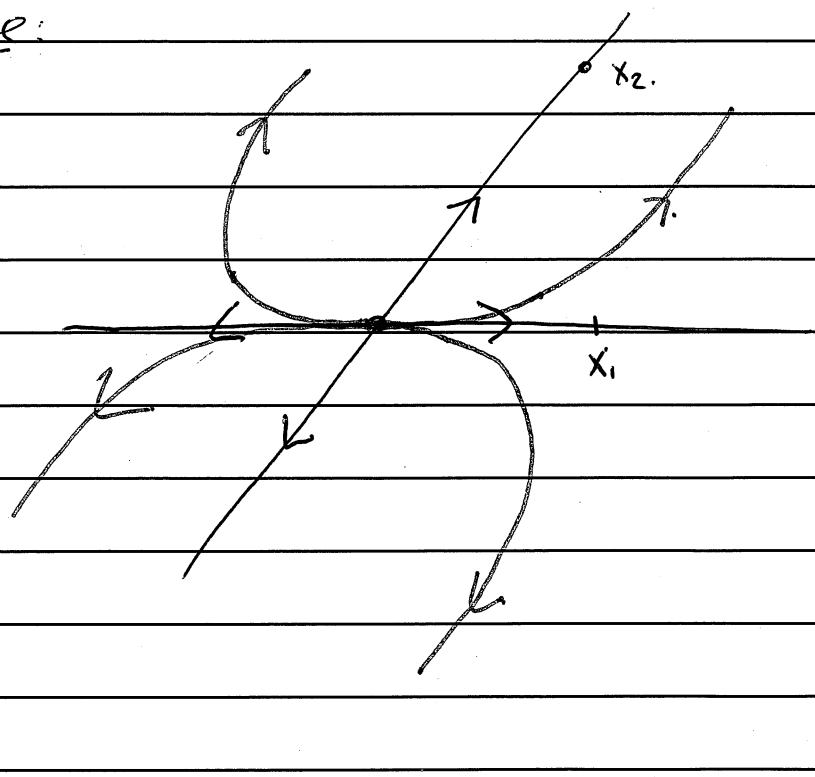
$\iff -2x+y=0 \iff y = 2x$

donc $X_2$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = 3$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions du type :

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \mu_1 e^{t} X_1 + \mu_2 e^{3t} X_2$$

avec $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}$

Portrait de phase :



Problème :

Partie I :

$(x,y)$ équilibre $\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ -x-cy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

Il y a donc un unique équilibre : $(0,0)$.

Le système s'écrit $X'(t) = AX(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$. On a : $\det A = 1$, $\operatorname{Tr} A = -c$ et les valeurs propres sont réelles si et seulement si $\Delta = c^2 - 4 \geq 0$.

Cas 1 : $c \geq 2$. Notons $\lambda_1, \lambda_2$ les valeurs propres. On a :
$\lambda_1, \lambda_2$ réelles car $\Delta \geq 0$, de même signe car $\det A > 0$ et négatives car $\operatorname{Tr} A < 0$. L'équilibre est donc asymptotiquement stable et pour $c > 2$, c'est ~~une source~~ un puits. (Pour $c > 2$, $\Delta \neq 0$, donc les valeurs propres sont distinctes).

Cas 2 : $0 < c < 2$ : $\lambda_1, \lambda_2$ complexes conjuguées, de partie réelle négative car $\operatorname{Tr} A < 0$. Equilibre asymptotiquement stable. C'est un ~~source~~ puits spirale.

Cas 3 : $c = 0$ $\lambda_1, \lambda_2$ imaginaires purs. Equilibre stable mais pas asymptotiquement stable. C'est un centre.

Cas 4 : $-2 < c < 0$ $\lambda_1, \lambda_2$ complexes, de partie réelle positive. Equilibre instable. Source spirale.

Cas 5 : $c \leq -2$. $\lambda_1, \lambda_2$ réelles (et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ si $c < -2$), positives. Equilibre instable. Source pour $c < -2$.

Partie 2 :

2a). Le système s'écrit $X'(t) = F(X(t))$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x - cy \end{pmatrix}$ ($F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$). $F$ est $C^\infty$ donc $C^1$ et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz donne le résultat voulu.

2b). Notons $K = \max\{1, |c|\}$. On a :

$\|X'(t)\|_\infty \leq (K+1)\|X(t)\|$, or on sait que si $\|X'(t)\| \leq a(t)\|X(t)\| + b(t)$ avec $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $C^0$ et $a \geq 0$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les solutions maximales sont globales. C'est donc le cas.

2c). $(x,y)$ est un équilibre $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -\sin x - cy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{il existe } k \in \mathbb{Z}, \\ x = k\pi. \end{cases}$

Pour l'équilibre $(0,0)$. Soit $J_{(x,y)}$ la jacobienne au point $(x,y)$.

On a : $J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -c \end{pmatrix}$. Donc $J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$

et le système linéarisé en 0 est celui de la partie 1.
Il est asymptotiquement stable si $c > 0$, instable si $c < 0$ et stable mais pas asymptotiquement stable si $c = 0$.
Le système initial a la même nature sauf pour $c = 0$ où l'on ne peut rien conclure (équilibre non hyperbolique).

Pour l'équilibre $(\pi, 0)$ : $J_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$ et le système linéarisé est $X'(t) = AX(t)$ avec $A = J_{(\pi,0)}$. Comme $\det A = -1 < 0$, les valeurs propres sont réelles de signes opposés, donc l'une est strictement positive et le système linéarisé comme le système initial sont instables. (l'équilibre est instable).

**UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE**

**CYCLE**

ANNÉE : ................. SESSION : .................

MATIÈRE : ...........................

UV = ................

Le candidat inscrit ici très lisiblement ses

Nom : ...............

Prénoms : ...............

N° GROUPE : ...............

Numéro de convocation : ...............

2/2

*Il est interdit aussi bien de signer à la fin de la composition que d'indiquer son nom ou son numéro sur les feuilles intercalaires.*

N° de groupe : ___________

Nombre d'intercalaires : 1

| | Note | Signature | Note finale |
|---|---|---|---|
| 1er correcteur | | | |
| 2e correcteur | | | |

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE

Ne pas écrire dans cette marge

Sujet : 2d) $(\mathbb{R}, t \mapsto D/c)$ est solution particulière.
La solution générale du système homogène est :
$(\mathbb{R}, t \mapsto \mu e^{-ct})$. La solution générale est donc définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $z(t) = \mu e^{-ct} + D/c \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{D}{c}$ car $c>0$

2e). Pour tout $t \geq 0$, $-1 - c\,y(t) \leq y'(t) \leq 1 - c\,y(t)$.
Notons $y_0 = y(0)$, $z_1$ la solution (globale) de $\begin{cases} z'(t) = -1 - c\,z(t) \\ z(0) = y_0 \end{cases}$
et $z_2$ la solution (globale) de $\begin{cases} z'(t) = 1 - c\,z(t) \\ z(0) = y_0. \end{cases}$

D'après les principes de comparaison, pour tout $t \geq 0$,
$z_1(t) \leq y(t) \leq z_2(t)$. or d'après 2d) $z_1(t) \xrightarrow[+\infty]{} -1/c$
~~et $z_2(t) \to 1/c$~~ et $z_2(t) \xrightarrow[+\infty]{} 1/c$. Donc en passant à la limite et en supposant $y(\cdot)$ convergente en $+\infty$.

PARTIE A RABATTRE

$-\frac{1}{c} \leq \lim_{t\to+\infty} y(t) \leq 1/c$.

Partie 3:

3a). On a:

$$\frac{d}{dt} L(x(t),y(t))\Big|_{t=t_0} = \mathring{L}(x(t_0),y(t_0)) \text{ où}$$

$$\mathring{L}(x,y) = (\sin x, y)\cdot(y, -\sin x) = 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Donc L est constante le long des trajectoires.

3b) $L(0,0)=0$ et $L(x,y)>0$ si $(x,y)\neq(0,0)$ dans un voisinage de $(0,0)$. Donc $(0,0)$ est un minimum strict local de L. Comme $\dot{L}(x,y)=0$ sur $\mathbb{R}^2$ donc au voisinage de $(0,0)$, le cours donne que $(0,0)$ est stable mais pas asymptotiquement stable. ( ~~le théorème du cours suffit~~.

3c) Si $(x,y)$ est un équilibre alors. $y=0$ et $\sin x=0$ donc $\cos x \in \{-1,1\}$ donc $L(x,y) \in \{0,2\}$.

3d) Si $0 < L(x(0),y(0)) < 2$. alors $0 < L(x(t),y(t)) < 2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$\frac{1}{2}y^2(t) \leq 2$ donc $|y(t)| < \sqrt{4} = 2$.

et: * $-\cos x(t) < 1$ donc $\cos x(t) \neq -1$ donc $x(t) \neq \pi+2k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et donc $x(0)-2\pi < x(t) < x(0)+2\pi$ par continuité de $x(\cdot)$ et théorème des valeurs intermédiaires. Donc $(x(\cdot),y(\cdot))$ est bornée.

Donc si $(x(t),y(t))$ a une limite en $+\infty$, cette limite est

$(x(t), y(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (x^*, y^*)$. Mais alors $(x^*, y^*)$ doit être un équilibre donc $L(x^*, y^*) \in \{0, 2\}$ ce qui est impossible car par continuité de $L$, $L(x(t), y(t)) \xrightarrow[+\infty]{} L(x^*, y^*)$ mais $L(x(t), y(t)) = L(x(0), y(0))$

$\xrightarrow[t\to+\infty]{} L(x(0), y(0)) \notin \{0, 2\}$.

3e) On a : $L(x(0), y(0)) = 1 - 1 + \frac{1}{2}(2)^2 = 2$.
donc $L(x(t), y(t)) = 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
~~Donc~~ Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $y(t) = 0$ alors $1 - \cos x(t) = 2$ donc $\cos x(t) = -1$ donc $\sin x(t) = 0$ et $(x(t), y(t))$ est un équilibre. C'est impossible car $(x(0), y(0))$ n'est pas un équilibre donc par Cauchy-Lipschitz, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x(t), y(t))$ n'est pas un équilibre.
Donc par continuité de $y(\cdot)$ et TVI, $y(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ et comme $x'(t) = y(t)$, $x(\cdot)$ est strictement croissante. De plus si $x(t) = \pi$ ~~alors $\sin x(t) = 0$~~ alors comme $L(x(t), y(t)) = 2$, on a $y(t) = 0$ donc $(x(t), y(t)) = (\pi, 0)$ est un équilibre : impossible. Donc $x(t) < \pi \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
donc $x(\cdot)$ est majorée et comme $x(\cdot)$ est croissante, il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \to x^*$.
De plus : $0 = x(0) < x^* \leq \pi$.
On a : $y'(t) = -\sin x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\sin x^*$. Comme $\frac{1}{2} y(t)^2 \leq L(x(t), y(t)) \leq 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, $y(\cdot)$ est bornée donc nécessairement $\sin x^* = 0$. Or $0 < x^* \leq \pi$, donc