TD 2 – Solutions des exercices 1 et 2

Exercice 1 : i) $\left(\mathbb{R},\ t \to \lambda e^{t^2/2}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) $\left(]-\infty;1[,\ t \to \dfrac{1}{1-t}\right)$

iii) Pour tout $\alpha \in]0;\pi[$, soit $t_\alpha = \tan(\pi/2 - \alpha)$, $J_\alpha^- =]-\infty; t_\alpha[$ et $J_\alpha^+ =]t_\alpha; +\infty[$. Les solutions sont :

* $(\mathbb{R},\ t \to t)$, qui correspond à $\alpha = 0$.
* pour tout $\alpha \in]0,\pi[$, $\left(J_\alpha^-,\ t \to \tan(\alpha + \operatorname{Arctan} t)\right)$

et $\left(J_\alpha^+,\ t \to \tan(\alpha + \operatorname{Arctan} t)\right)$.

(Une correction détaillée ~~sera mise en ligne ultérieurement~~ est sur la page suivante.)

Exercice 2 :

2A) Toutes les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$. Elles sont données par :

i) $x(t) = e^{(e^t - 1)} = \dfrac{1}{e} e^{(e^t)}$

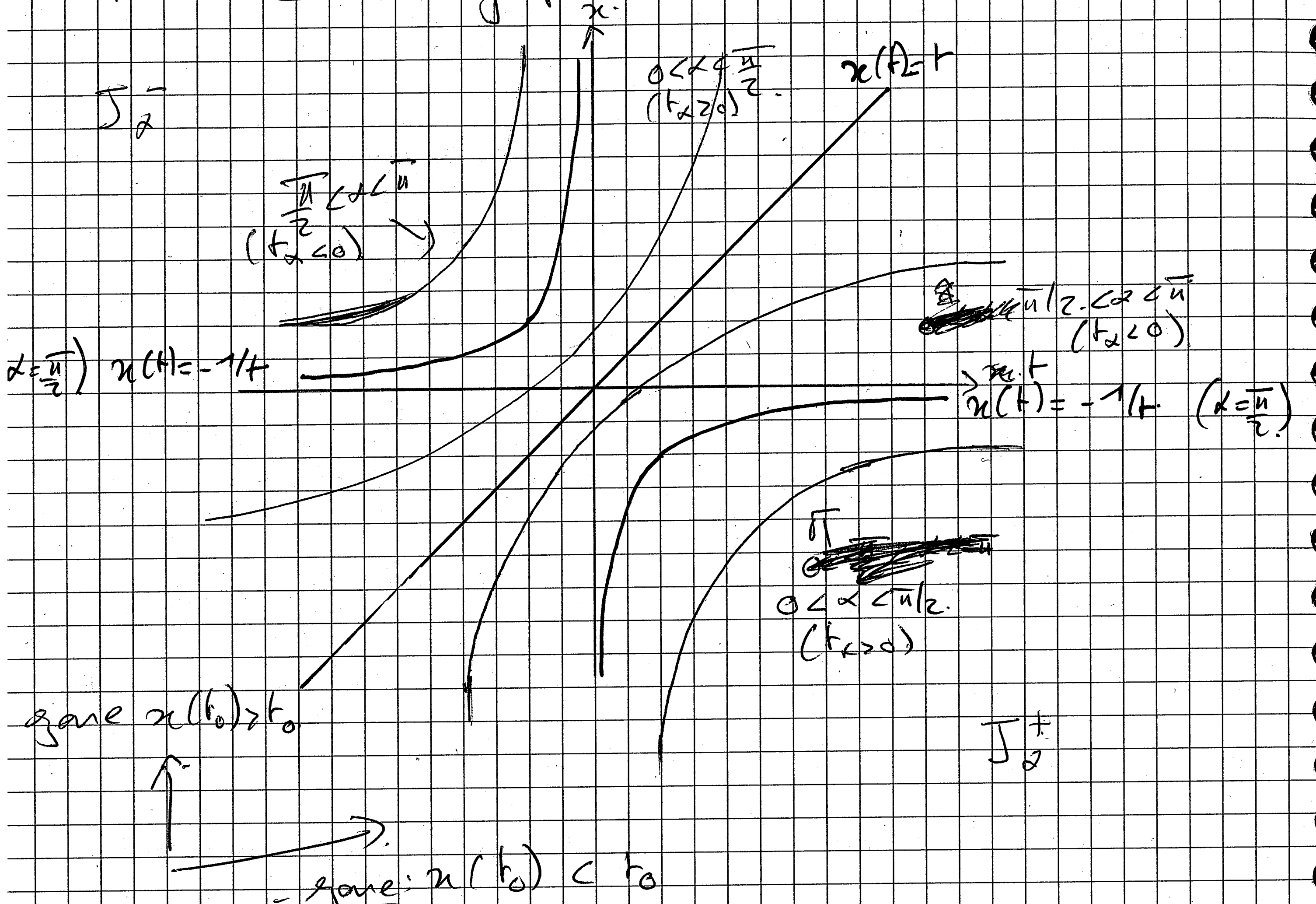
ii) $x(t) = \dfrac{b}{a}\left(e^{at} - 1\right)$

iii) $x(t) = \dfrac{3}{2} e^t - \dfrac{1}{2}(\cos t + \sin t)$

iv) $x(t) = \dfrac{\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)}{\sqrt{1+t^2}} + \dfrac{K}{\sqrt{1+t^2}}$

2B) Environ 7h. Précisément $\dfrac{3 \ln 5}{\ln 2}$ heures.

Exercice 1 ii) : graphe des solutions :



Résolution du 1 ii) : $1+x^2$ ne s'annule jamais. Par séparation des variables on obtient que si $(J, x(\cdot))$ est solution alors sur J :

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{donc} \quad \operatorname{Arctan} x(t) = (\operatorname{Arctan} t) + \alpha$$

donc $x(t) = \tan(\alpha + \operatorname{Arctan} t)$. ~~Pour α~~ Comme tan est π périodique on peut supposer $\alpha \in [0, \pi[$. Pour $\alpha = 0$, on obtient la solution globale $x(t) = t$. Pour $\alpha \in]0, \pi[$, l'expression est définie sauf quand $\alpha + \operatorname{Arctan} t = \pi/2$ soit $t = \tan(\pi/2 - \alpha) = t_\alpha$.
Elle est donc définie sur $J_\alpha^- =]-\infty, t_\alpha[$ et sur $J_\alpha^+ =]t_\alpha, +\infty[$.
(Pour $\alpha = \pi/2$, l'expression vaut $x(t) = -1/t$. De plus J_α^- correspond à des solutions tq $x(t_0) > t_0$ et J_α^+ à des solutions tq $x(t_0) < t_0$)
On vérifie que l'expression donnée est bien solution sur J_α^- et sur J_α^+.