TD2

Exercice 3 (Bernoulli)

$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^{n}(t)$ avec $n \neq 1$

$a(\cdot), b(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ C^0

A) $(I, t \mapsto 0)$ solution donc si $(J, x(\cdot))$ autre solution maximale, $x(t) \neq 0$ $\forall t \in J$. On peut donc poser $u(t) = x^{1-n}(t)$.

~~Soit $(J, x(\cdot))$ [Soit $x : J \to \mathbb{R}$ (J, x) éventuellement ne s'annulant pas sur J. Soit $u : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x^{1-n}(t)$]~~

~~On a :~~

On a : $u'(t) = (1-n)\dfrac{x'(t)}{x^{n}(t)} = (1-n)\left(\dfrac{a(t)x(t) + b(t)x^{n}(t)}{x^{n}(t)}\right)$

$= (1-n)\left(a(t)x^{1-n}(t) + b(t)\right) = (1-n)\left(a(t)\,u(t) + b(t)\right)$.

Donc $u(\cdot)$ vérifie une EDO linéaire.

[Rq : si $u(\cdot)$ ne s'annule pas, ens. de définition = que $x(\cdot)$; sinon + gros]

B) Résolution de : $(E)\begin{cases} x'(t) = x(t) - e^{t}x^{3}(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Cas $n=3$. Soit $(J, x(\cdot))$ solution de (E). Comme $x(0) \neq 0$, $x(\cdot)$ ne s'annule pas sur J. On peut donc poser $u(t) = x^{1-3}(t) = \dfrac{1}{x^{2}(t)}$.

On a : $(E')\begin{cases} u'(t) = -2\left(u(t) - e^{t}\right) = -2u(t) + 2e^{t} \quad (*) \\ u(0) = \dfrac{1}{x^{2}(0)} = 1. \end{cases}$

~~Sol Dém (Duhamel)~~ :

Résolution de $(*)$: on cherche sous la forme $u(t) = \lambda(t)e^{-2t}$

On obtient : $\lambda'(t)e^{-2t} - \cancel{2\lambda(t)e^{-2t}} = \cancel{-2\lambda(t)e^{-2t}} + 2e^{t}$

donc $\lambda'(t) = 2e^{3t}$ donc $\lambda(t) = \lambda_0 + \frac{2}{3}e^{3t}$

donc $v(t) = \left(\lambda_0 + \frac{2}{3}e^{3t}\right)e^{-2t} = \lambda_0 e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t}$

Résolution de (E) :

Comme $v(0)=1$, on a : $\lambda_0 + 2/3 = 1$ donc $\lambda_0 = 1/3$

donc $\boxed{v(t) = \frac{2}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t}}$ (définie et solution sur $\mathbb{R}$, égale à $\frac{1}{x^2(t)}$ sur J.)

~~Donc $x^2(t)$~~ or $v(t) = \frac{1}{x^2(t)}$ et $x(0) = 1 > 0$ donc

(comme $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$ solution), $x(t) > 0$ $\forall t \in J$ donc

$x(t) = \sqrt{x^2(t)}$. donc $x(t) = \sqrt{\frac{1}{v(t)}} = \frac{1}{\sqrt{2/3\, e^{t} + 1/3\, e^{-2t}}}$ $(x \neq 0)$

sur J. ~~Comme $v(\cdot)$ ne s'annu~~ Comme l'expression

donnant $v(\cdot)$ ne s'annule pas, on peut mq J est égal à

l'intervalle sur lequel cette expression est solution de (E').

cad $\mathbb{R}$. Sinon on vérifie que $(x \neq 0)$ est

solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Bilan : $\left(\mathbb{R},\ t \mapsto \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2e^{t} + e^{-2t}}}\right)$

En effet : soit $x : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$ donnée par

$v(t) = \frac{1}{x^2(t)}$. On montre que $x(\cdot)$ solution de (E) sur J

$\Leftrightarrow v(\cdot)$ ———— de (E') sur J.

Du coup, si $v(\cdot)$ solution de (E') sur $\mathbb{R}$ ~~ne~~ ne s'annulant pas,

alors $x(t) = \frac{1}{\ldots}$ définie, C^1 sur $\mathbb{R}$ et solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Ricatti) :

A) $x' = ax + bx^2 + c$ (E)

Si $u(\cdot)$ sol. particulière ~~et~~ et $v(t) = x(t) - u(t)$, où $x(\cdot)$ solution de (E), on a (sur l'intersection des domaines de définitions).

$v' + u' = a(v+u) + b(v+u)^2 + c$ or $u' = au + bu^2 + c$

d'où $v' = av + b[(v+u)^2 - u^2]$

$= av + bv^2 + 2ubv = (a+2ub)v + bv^2$.

Donc : $\boxed{v' = (a+2ub)v + bv^2} = \alpha v + bv^2$ avec $\alpha(\cdot) = a(\cdot) + 2u(\cdot)b$

qui est une éq. de Bernoulli.

B) (C) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - x^2(t) - p & (*) \\ x(0) = 1. \end{cases}$ avec $0 \le p \le 1/4$.

On cherche une solution particulière de (*).

Le + facile : équilibres.

Ce sont les solutions de $x - x^2 - p = 0$

i.e $x^2 - x + p = 0$. Comme $0 \le p \le 1/4$

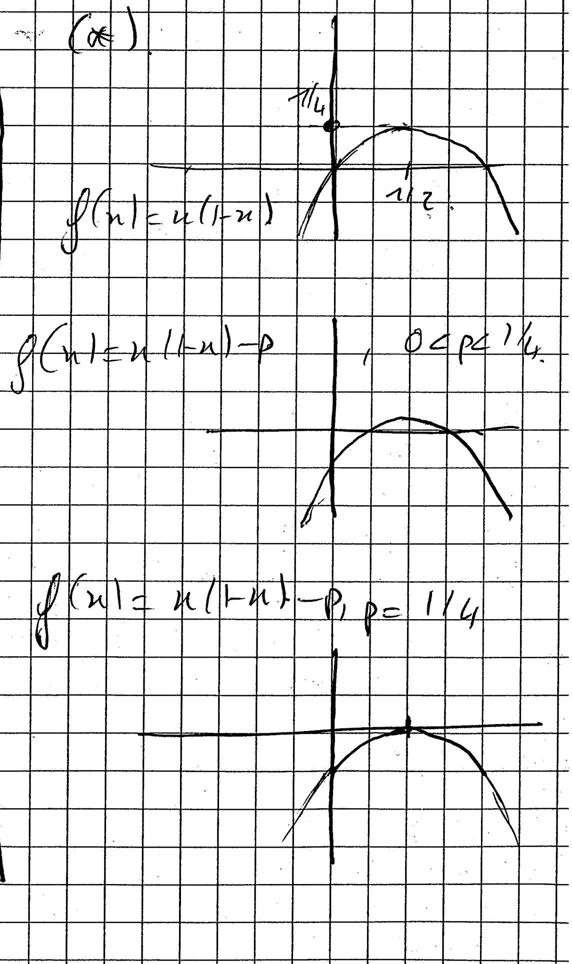
il en existe (dessins ci-contre ou calcul direct).

$\Delta = 1 - 4p \ge 0$.

Équilibres $\begin{cases} x_+ = \dfrac{1 + \sqrt{1-4p}}{2} \in [1/2, 1] \\ x_- = \dfrac{1 - \sqrt{1-4p}}{2} \in [0, 1/2] \end{cases}$

↳ deux solutions particulières.

On en choisit une, celle qu'on veut !



Soit $u(\cdot)$ l'une de ces solutions $\left(\text{i.e } u(t) = x_+ \text{ ou } u(t) = x_- \text{ sur } \mathbb{R}\right)$

et $x(\cdot)$ la solution de (E), déf. sur J.

~~On a sur J Soit v~~

Soit $v = x - u$ (sur J). On a :

$v' = (a + 2ub)v + bv^2$ avec ici $\begin{cases} a(t) = 1 \\ b(t) = -1. \end{cases}$

donc $\boxed{v' = (1 - 2x^*)v - v^2}$ avec x^* tq $u(t) = x^*$ $\forall t$.

~~On pose : $w(t) =$~~

De plus : $x(0) = 1$ donc $v(0) = x(0) - u(0) = 1 - x^*$

i. Si $p = 0$, on montre directement que la solution de (E) est ~~...~~ $(\mathbb{R}, t \to 1)$ ~~(...)~~ (stationnaire)

car $x_0 = 1$ est alors un éq. On la retrouve ainsi : si $p = 0$,

en prenant $x^* = x_+$, on obtient $x^* = 1$ donc $v(0) = 0$ donc

$\begin{cases} v' = (1 - 2x^*)v - v^2 \\ v(0) = 0 \end{cases}$ ~~donc v~~ or $(\mathbb{R}, t \to 0)$ solution

donc $v(t) = 0$ $\forall t$ donc $x(t) = x^* = 1$ sur J et on montre

ensuite que $J = \mathbb{R}$.

Si $p \neq 0$, $x^* \neq 1$, donc $v(0) \neq 0$. Comme $(\mathbb{R}, t \to 0)$ est solution

de $v' = (1 - 2x^*)v - v^2$, ceci implique que v ne s'annule

pas. On peut donc poser $w(t) = \dfrac{1}{v(t)}$, sur J. On a alors :

$$w' = -\frac{v'}{v^2} = -\left[\frac{(1 - 2x^*)v - v^2}{v^2}\right] = -\frac{(1 - 2x^*)}{v} + 1 = -(1 - 2x^*)w + 1.$$

et $w(0) = \dfrac{1}{1 - x^*}$.

$\hookrightarrow$ on résoud.

$(\mathcal{E}'')\begin{cases} w' = (2x^*-1)\,w + 1 \\ w(0) = \dfrac{1}{1-x^*} \end{cases}$ $\quad \cancel{(E)} \quad (E'')$.

Cas 1 : $x^* = 1/2$, ceci $p = 1/4$ (pour $x^* = x_+$ et comme pour $x^* = x_-$)

$\hookrightarrow$ $w' = 1$ donc $w(t) = t + w(0) = t + 2$.

donc $v(t) = \dfrac{1}{w(t)} = \dfrac{1}{t+2}$ donc $x(t) = v(t) + x^* = v(t) + 1/2$
$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{t+2}$

On vérifie que c'est solution sur $J =]-2 ; +\infty[$.

Cas 2 : $x^* \neq 1/2$, i.e $0 < p < 1/4$.

Sol. générale de (E'') : sans second membre $t \mapsto \lambda e^{(2x^*-1)t}$

Sol. particulière : $w(t) = \dfrac{1}{1-2x^*}$

donc : $w(t) = \dfrac{1}{1-2x^*} + \lambda e^{(2x^*-1)t}$

Or $w(0) = \dfrac{1}{1-x^*}$ donc $\dfrac{1}{1-2x^*} + \lambda = \dfrac{1}{1-x^*}$

et $\lambda = \dfrac{1}{1-x^*} - \dfrac{1}{1-2x^*}$ donc $\lambda = \dfrac{-x^*}{(1-x^*)(1-2x^*)}$

Puis : $v(t) = \dfrac{1}{w(t)} = \dfrac{1-2x^*}{1+(1-2x^*)\lambda e^{(2x^*-1)t}}$

et $x(t) = \dfrac{1-2x^*}{1+(1-2x^*)\lambda e^{(2x^*-1)t}} + x^*$ avec $(1-2x^*)\lambda = -\dfrac{x^*}{1-x^*}$.

d'où $x(t) = \dfrac{1-2x^*}{1-\left(\dfrac{x^*}{1-x^*}\right)e^{(2x^*-1)t}} + x^*$. En travaillant, on

montre que $x(t) = 1 - p\left(\dfrac{e^{x_+t} - e^{x_-t}}{x_+e^{x_+t} - x_-e^{x_-t}}\right)$

défini sur $]T, +\infty[$ avec $T = -\frac{1}{\sqrt{1-4p}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4p}}{1-\sqrt{1-4p}}\right)$

$$t_0 = -\frac{1}{\sqrt{1-4p}} \ln\left(\frac{x_+}{x_-}\right)$$

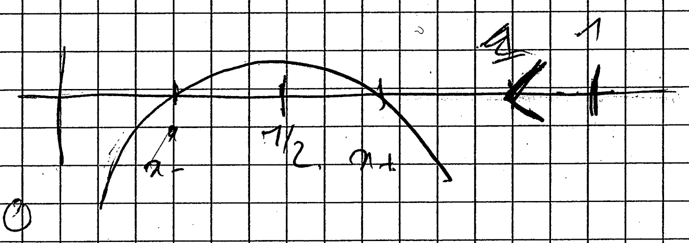
Bilan :

$p=0$	$(\mathbb{R}, t \mapsto 1)$
$p = 1/4$	$\left(]-2, +\infty[, t \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{t+2}\right)$
$0 < p < 1/4$	$\left(]T, +\infty[, t \mapsto 1 - p\left(\frac{e^{x_+ t} - e^{x_- t}}{x_+ e^{x_+ t} - x_- e^{x_- t}}\right)\right)$

avec
$$\begin{cases} x_+ = \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2} \\ x_- = \frac{1-\sqrt{1-4p}}{2} \\ T = -\frac{1}{\sqrt{1-4p}} \ln\left(\frac{x_+}{x_-}\right) < 0 \end{cases}$$

$x_+ + x_- = 1.$

Résol. qualitative (cas $0 < p < 1/4$)



Exercice 5 : $y' + y - ty^2 = 0$.

1/ $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$ est solution maximale et par C-L c'est la seule.

2/ C'est une éq. de Bernoulli. (Et par ailleurs toutes les solutions différentes de $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$ ne s'annulent pas). On pose $u(t) = \frac{1}{y(t)}$.

On a : $u' = -\frac{y'}{y^2} = \frac{y - ty^2}{y^2} = \frac{1}{y} - t = u - t$.

On résoud

↳ $u(t) = t+1 - Ke^{t}$ d'où $y(t) = \frac{1}{t+1-Ke^{t}}$

qui est solution tant que $u(\cdot)$ ne s'annule pas, i.e. tant que $t+1-Ke^{t} \neq 0$ i.e. $(t+1)e^{-t} \neq K$ i.e. $F(t) \neq K$ avec les notations du 3/.

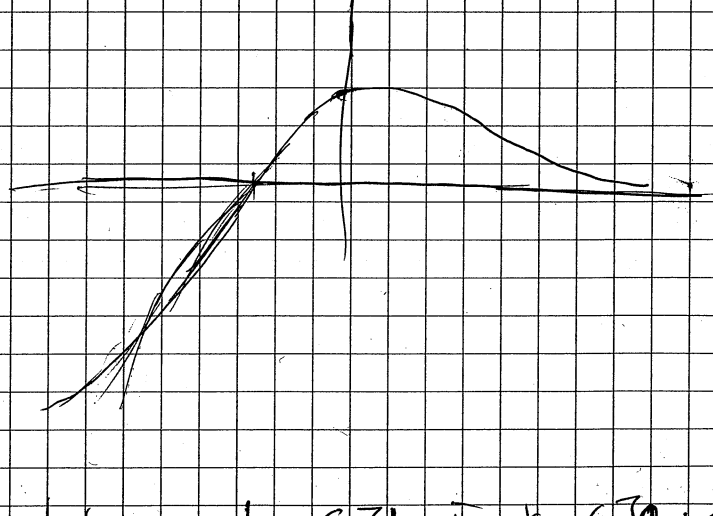
3/ $F(t) = (1+t)e^{-t}$. $F'(t) = (-1-t+1)e^{-t} = -te^{-t}$

du signe de $-t$, donc $F \nearrow$ sur $]-\infty;0[$, $\searrow$ sur $]0;+\infty[$.

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-te^{-t}$		$+$		$+$	0	$-$	
$F(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$F(t) \to -\infty$ en $-\infty$

$F(t) \to 0$ en $+\infty$.



- Si $K > 1$: $F(t) = K$ n'a pas de solutions.
- Si $K = 1$: $F(t) = K$ a la solution unique $t = 0$.

si $0 < K < 1$: $F(t) = K$ a deux solutions : $t_- \in]-1;0[$, $t_+ \in]0;+\infty[$

si $K \leq 0$: $F(t) = K$ a une solution unique $t_- \in]-\infty;-1]$.

4/ Sol. maximales :

a) $y(t) = 0$, sur $\mathbb{R}$

b) $(k>1)$: $y(t) = \dfrac{1}{t+1-ke^t}$, sur $\mathbb{R}$.

c) $(k=1)$: $y(t) = \dfrac{1}{t+1-e^t}$ → sur $\mathbb{R}_-^*$; → sur $\mathbb{R}_+^*$

d) $(0<k<1)$: $y(t) = \dfrac{1}{t+1-ke^t}$ → sur $]-\infty, t_-(k)[$; → sur $]t_-(k), t_+(k)[$; → sur $]t_+(k), +\infty[$.

e) $(k \leq 0)$: $y(t) = \dfrac{1}{t+1-ke^t}$ → sur $]-\infty, t(k)[$; → sur $]t(k), +\infty[$.