Partie I :

1/. L'équation (1) s'écrit $X'(t) = F(X(t))$ avec $X(t) = (x(t), y(t))$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2-x-y, 1-x-y)$. Comme F est C^∞ donc C^1, le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que (1) a une unique solution maximale.

2/. Soit $(J, (x(\cdot), y(\cdot)))$ l'unique solution maximale de (1). Soit $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto (2-x-y(t))x$.
Comme $(x(\cdot), y(\cdot))$ est C^1, $y(\cdot)$ l'est aussi, donc f est C^1.
De plus $x(\cdot)$ et la fonction $z : J \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$ sont deux solutions sur J de $u'(t) = f(t, u(t))$.
Donc d'après un corollaire du théorème de Cauchy-Lipschitz, si $x(0) = z(0)$, alors $x(t) = z(t)$ sur J et sinon $x(t) \neq z(t)$ sur J. Donc si $x_0 = 0$, alors $x(t) = 0$ sur J et sinon $x(t) \neq 0$ sur J. Par continuité de $x(\cdot)$ et le TVI, on a donc que si $x_0 > 0$, $x(t) > 0$ sur J.
On montre de même que si $y_0 = 0$ alors $y(t) = 0$ sur J et si $y_0 > 0$ alors $y(t) \geq 0$ sur J.

3/ D'après 2/. on a sur J : $(x(t) + y(t))x(t) \geq 0$. On a donc : $x'(t) = 2x(t) - (x(t)+y(t))x(t) \leq 2x(t)$. Donc sur $J \cap \mathbb{R}_+$, par le principe de comparaison (cas linéaire), $x(t) \leq v(t)$ où $v(\cdot)$ est la solution de $\begin{cases} v'(t) = 2v(t) \\ v(0) = x(0) \end{cases}$, i.e $v(t) = x_0 e^{2t}$. On montre de même que sur $J \cap \mathbb{R}_+$, $y(t) \leq y_0 e^t$, ~~si bien qu'en posant~~ $\cancel{w(t) = \sqrt{(x_0 e^{2t})^2 + (y_0 e^t)^2}}$, ~~on a~~
De plus, sur J, $x(t) \geq 0$ et $y(t) \geq 0$. Donc en posant $w(t) = \max(x_0 e^{2t}, y_0 e^t)$, qui est définie et continue sur $\mathbb{R}$, on a : $\|(x(t), y(t))\|_\infty \leq w(t)$ sur $J \cap \mathbb{R}_+$.
D'après le critère de non explosion, on a donc $\sup J = +\infty$ d'où $\mathbb{R}_+ \subset J$.

4/. Comme sur J, $y(t)x(t) \geq 0$, on obtient $x'(t) \leq (2 - x(t))x(t)$ donc par principe de comparaison, $x(t) \leq v(t)$ sur $J \cap J_v \cap \mathbb{R}_+$ où (J_v, v) est la solution de $\begin{cases} v'(t) = (2-v(t))v(t) \\ v(0) = x_0 \geq 0 \end{cases}$. D'après le théorème sur le comportement qualitatif des équations autonomes en dimension 1, on a $\mathbb{R}_+ \subset J_v$ et : si $x_0 = 0$ alors $v(t) = 0$ sur J_v donc $v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$; si $x_0 > 0$, $v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2$.
On a donc : $J \cap J_v \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$ et $\limsup x(t) \leq \limsup v(t) = \lim v(t) \leq 2$.

On montre de même que $y'(t) \leq (1-y(t))y(t)$ d'où, comme $y_0 \geq 0$, $\limsup_{t \to +\infty} y(t) \leq 1$.

5/. (i) Comme $(\mathbb{R}, (0,0))$ est alors solution, on a par unicité de la solution $(x(t), y(t)) = (0,0) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0)$.

(ii) D'après 2/., $y(t) = 0$ sur J donc $(J, x(\cdot))$ solution de $x'(t) = (2 - x(t))x$. Comme de plus $\mathbb{R}_+ \subset J$, ceci implique $x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 2$. Donc $(x(t), y(t)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} (2,0)$.

(iii) Le même raisonnement montre que $(x(t), y(t)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} (0,1)$

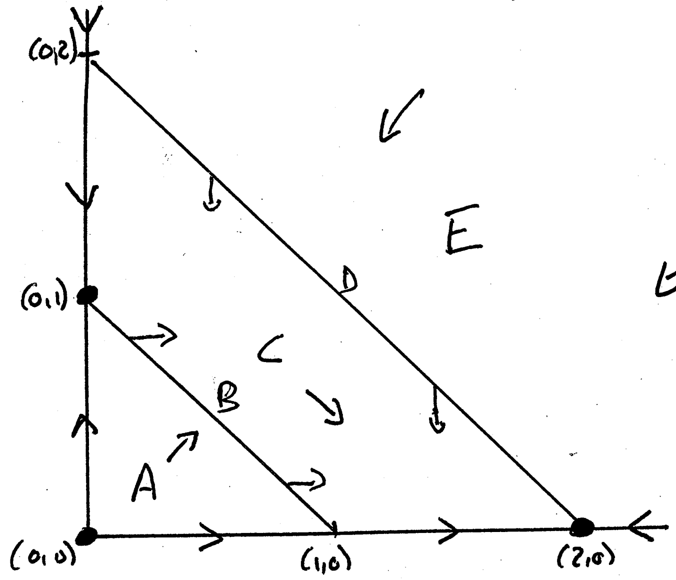
Partie II : Les équilibres du système sont les solutions de $F(x,y) = (0,0)$ où $F(x,y) = ((2-x-y)x, (1-x-y)y)$. Un calcul rapide montre qu'il y en a trois : $(0,0)$, $(2,0)$ et $(0,1)$. Si (x^*, y^*) est l'un de ces équilibres, le système linéarisé en ce point est le système $h'(t) = A_{(x^*, y^*)} h(t)$ où $h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$ et $A_{(x^*, y^*)}$ est la jacobienne de F en (x^*, y^*), c'est à dire :

$$A_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} 2-2x^*-y^* & -x^* \\ -y^* & 1-x^*-2y^* \end{pmatrix}.$$

On a : $A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{(2,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Donc :
- pour $(x^*, y^*) = (0,0)$: les valeurs propres de $A_{(0,0)}$ sont 2 et 1. Donc (x^*, y^*) est hyperbolique. De plus, pour le système linéarisé, $(0,0)$ est une source et est instable. On en déduit que pour le système initial, $(0,0)$ est instable.
- pour $(x^*, y^*) = (2,0)$: les valeurs propres de $A_{(2,0)}$ sont -2 et -1. Donc (x^*, y^*) est hyperbolique. De plus, pour le système linéarisé, $(0,0)$ est un puits et est asymptotiquement stable. Donc pour le système initial (1), $(2,0)$ est asymptotiquement stable.
- pour $(x^*, y^*) = (0,1)$: les vap de $A_{(0,1)}$ sont 1 et -1. Donc (x^*, y^*) est hyperbolique. De plus, pour le système linéarisé, $(0,0)$ est un point-selle et est instable. Donc pour le système initial (1), $(0,1)$ est instable.

0/.



1/. a1) Puisque $(x(t_c),y(t_c))\in C$, $\begin{cases} x(t_c)>0 \\ y(t_c)>0\end{cases}$ donc d'après la partie I, $\begin{cases}x(t)>0\\ y(t)>0\end{cases}$ pour tout $t\in J$. Donc $\begin{cases}x(T)\geq 0\\ y(T)\geq 0\end{cases}$. De plus, sur $[t_c,T[$, $1<x(t)+y(t)<2$

donc par continuité de $t\mapsto x(t)+y(t)$, $1\leq x(T)+y(T)\leq 2$. Or $(x(T),y(T))\notin C$

~~donc $x(T)+y(T)\notin]1,2[$ donc~~

Donc: $(x(T),y(T))\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geq 0, y\geq 0, 1\leq x+y\leq 2\}\setminus C$

$= B\cup D$.

a2). Par définition de B, $v(T)=x(T)+y(T)=1$. De plus,

$v'(T)=x'(T)+y'(T)=(2-v(T))x(T)+\underbrace{(1-v(T))}_{0}y(T)$

$= x(T)>0$

donc il existe $\varepsilon>0$ tel que $t=T-\varepsilon\geq t_c$ et $v(t)<v(T)=1$, donc $(x(t),y(t))\notin C$.

Donc il existe $t\in[t_c,T[$ tel que $(x(t),y(t))\notin C$, ce qui contredit la définition de T.

De même, si $(x(T),y(T))\in D$, alors $v(T)=2$ et $v'(T)<0$, donc il existe $t\in]t_c,T[$ tel que $(x(t),y(t))\in E$ et en particulier $(x(t),y(t))\notin C$, contredisant la définition de T.

a3). On a vu que si on n'a pas $(x(t),y(t))\in C$ pour tout $t\geq t_c$ alors $(x(T),y(T))\in B\cup D$, mais $(x(T),y(T))$ ne peut pas être dans $B\cup D$ d'après a2). Donc $(x(t),y(t))\in C$ pour tout $t\geq t_c$.

b) Sur $[t_c;+\infty[$, $(x(t),y(t)) \in C$ donc $v(t) \in]1,2[$ d'après a).

Donc, comme par ailleurs $x(t)>0$, $y(t)>0$,

$$\begin{cases} x'(t) = (2-v(t))x(t) > 0 \\ y'(t) = (1-v(t))\,y(t) < 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x(\cdot) \text{ est croissante} \\ y(\cdot) \text{ est décroissante.} \end{cases}$$

Comme de plus $(x(t),y(t)) \in C$ sur $[t_c;+\infty[$, on a $\begin{cases} x(t) \leq 2 \\ y(t) \geq 0 \end{cases}$

donc $x(\cdot)$ majorée et $y(\cdot)$ minorée sur $[t_c;+\infty[$. Donc $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ convergent quand $t \to +\infty$. Soient x^* et y^* leur limites respectives. Comme $x(\cdot)$ est croissante sur $[t_c,+\infty[$, $x^* \geq x(t_c)$. De même, ~~...~~ $y^* \leq y(t_c)$. Enfin, si ~~...~~ une solution d'une équation autonome converge quand $t \to \sup J$, sa limite est forcément un équilibre. Donc (x^*,y^*) est un équilibre.

c) On doit avoir : (x^*,y^*) équilibre donc $(x^*,y^*) \in \{(0,0),(2,0),(0,1)\}$. Comme de plus $x^* \geq x(t_c) > 0$, on a forcément $(x^*,y^*) = (2,0)$

donc $(x(t),y(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (2,0)$.

2/. S'il existe $t_b \in \mathbb{R}_+$ tel que $(x(t_b),y(t_b)) \in B$. Alors $v(t_b)=1$ et
$v'(t_b) = (2-v(t_b))x(t_b) + (1-v(t_b))y(t_b) = x(t_b) > 0$. Donc v est strictement croissante au voisinage de t_b. De plus, par continuité de $v(\cdot)$ $v(t)<2$ au voisinage de t_b. Il existe donc $t_c > t_b$ tel que ~~...~~ $v(t_b) < v(t_c) < 2$, i.e $1 < v(t_c) < 2$, et comme par ailleurs $\begin{cases} x(t)>0 \\ y(t)>0 \end{cases}$ sur J, $(x(t_c),y(t_c)) \in C$. De même, si $(x(t_d),y(t_d)) \in D$, $v(t_d) = 2$ et $v'(t_d) < 0$, donc il existe $t_e > t_d$ tel que $(x(t_e),y(t_e)) \in C$.

Donc d'après 1/, $(x(t),y(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (2,0)$.

3/. a) Tant que $(x(t), y(t)) \in A$ alors d'une part, $\begin{cases} x'(t) = \underbrace{(2-v(t))}_{>0} \underbrace{x(t)}_{>0} > 0 \\ y'(t) = \underbrace{(1-v(t))}_{\geq 0} \underbrace{y(t)}_{>0} \geq 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x(\cdot) \text{ est croissante} \\ y(\cdot) \text{ est ~~dé~~croissante} \end{cases}$, et d'autre part $\begin{cases} x(t) \leq 1 \\ y(t) \leq 1 \end{cases}$.

Donc si $(x(t), y(t)) \in A$ pour tout $t \geq t_a$, alors $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ convergent vers des limites respectives $x^* \geq x(t_a) > 0$ et $y^* \geq y(t_a) > 0$.

~~Com~~ b) Comme (x^*, y^*) devrait être un équilibre et qu'il n'y en a pas tel que $\begin{cases} x^* > 0 \\ y^* > 0 \end{cases}$, c'est impossible. Donc il existe $t \geq t_a$ tel que

$(x(t), y(t)) \notin A$.

c). ~~D'après 3a), $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont croissantes sur $[t_a, T[$, donc~~

Comme $v(\cdot)$ est continue et que $v(t) \in]0,1[$ sur $[t_a, T[$, on a $v(T) \in [0,1]$.

De plus, on doit avoir $\begin{cases} x(T) > 0 \\ y(T) > 0 \end{cases}$ donc la seule manière d'avoir $(x(T), y(T)) \in A$

est d'avoir $v(T) = 1$ (~~rappelons que~~ notons $v(T) = \underbrace{x(T)}_{\geq 0} + \underbrace{y(T)}_{>0} \geq 0$), et donc finalement

Comme $\begin{cases} x(T) \geq 0 \\ y(T) \geq 0 \end{cases}$, on a $(x(T), y(T)) \in B$. D'après 2/. avec $T = t_b$, on a

$$(x(t), y(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (2,0).$$

4/ Dans la zone E, $\begin{cases} x'(t) < 0 \\ y'(t) < 0 \end{cases}$. Donc si $(x(t), y(t)) \in E$ pour tout

$t \geq t_e$, $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont décroissantes sur $[t_e, +\infty[$, or elles sont minorées par 0, donc doivent converger. Leur limites x^*, y^* doivent vérifier : $\begin{cases} (x^*, y^*) \in \overline{E} \\ (x^*, y^*) \text{ est un équilibre} \end{cases}$, et la seule possibilité est donc $(x^*, y^*) = (2,0)$

S'il existe $t \geq t_e$ tel que $(x(t), y(t)) \notin E$, alors le premier instant T ayant cette propriété doit vérifier $v(T) \geq 2$ par continuité de v, et par ailleurs

$\begin{cases} x(T) > 0 \\ y(T) > 0 \end{cases}$. On a donc $(x(T), y(T)) \in D$ et par 2/. avec $t_d = T$,

$$(x(t), y(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (2,0).$$

5/. ~~Comme~~ Si $x_0>0$, $y_0>0$, alors en $t=0$, $(x(t),y(t))\in A\cup B\cup C\cup D\cup E$, donc par l'un des cas étudiés précédemment, $(x(t),y(t))\xrightarrow[t\to+\infty]{}(2,0)$.

Partie IV (on suppose $x_0>0$, $y_0>0$).

1/ Pour tout $t\in J$, $w'(t)=\dfrac{x'(t)}{x(t)}-\dfrac{y'(t)}{y(t)}=(2-x(t)-y(t))-(1-x(t)-y(t))$

$=1$

(notons que $\begin{cases}x(t)>0\\y(t)>0\end{cases}$ sur J, donc le calcul précédent a du sens).

Donc $w(t)=w(0)+t\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$. Donc $\dfrac{x(t)}{y(t)}=\exp(w(t))\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$.

Comme d'après la partie I, $\limsup_{t\to+\infty} x(t)\leq 2$, ceci implique $y(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.

2/ Comme $y(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, il existe $T_\varepsilon\geq 0$ tel que, pour tout $t\geq T_\varepsilon$, $y(t)\leq\varepsilon$.

Pour $t\geq T_\varepsilon$, on a donc $x'(t)=(2-x(t)-y(t))\underbrace{x(t)}_{\geq 0}\geq(2-x(t)-\varepsilon)x(t)$.

donc par le principe de comparaison, $x(t)\geq v(t)$ ~~sur $J_v\cap\mathbb{R}_+$ où $(J_v,v(\cdot))$ est la solution~~ sur $[T_\varepsilon,+\infty[\,\cap J_v$ où $(J_v,v(\cdot))$ est la solution de

$\begin{cases}v'(t)=(2-\varepsilon-v(t))v(t)\\v(T_\varepsilon)=x(T_\varepsilon)\end{cases}$. Comme $x(T_\varepsilon)>0$, on a $\mathbb{R}_+\subset J_v$ et

$v(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}2-\varepsilon$, donc finalement : $\liminf_{t\to+\infty} x(t)\geq\liminf_{t\to+\infty} v(t)=2-\varepsilon$.

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon>0$, donc $\liminf_{t\to+\infty} x(t)\geq 2$. Or d'après la partie I, $\limsup_{t\to+\infty} x(t)\leq 2$. Or $\liminf_{t\to+\infty} x(t)\leq\limsup_{t\to+\infty} x(t)$. Donc

$\liminf_{t\to+\infty} x(t)=\limsup_{t\to+\infty} x(t)=2$, donc $x(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}2$. Comme $y(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$

d'après 1/, on a $(x(t),y(t))\xrightarrow[t\to+\infty]{}(2,0)$