Devoir : résolution qualitative des équations autonomes en dim 1.

Eléments de corrigé

Partie 1 :

1) f est C^1. De plus, comme $\|x(t)\| \underset{t\to \sup J_+}{\longrightarrow} \|x^*\|$, on n'a pas $\|x(t)\| \underset{t\to\sup J}{\longrightarrow} +\infty$ donc d'après l'alternative d'explosion, $\sup J = +\infty$.

Comme f est continue et $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x^*$ on a $f(x(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} f(x^*)$.

2). Comme $f(x(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} f(x^*)$, en prenant $\varepsilon = \frac{f(x^*)}{2} > 0$ dans la définition de la limite, on obtient qu'il existe $T\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \geq T$, $f(x(t)) \geq f(x^*) - \frac{f(x^*)}{2} = \frac{f(x^*)}{2} > 0$.

~~Pour tout $t\geq T$~~, Or $x'(t) = f(x(t))$ donc pour tout $t\geq T$, $x'(t) \geq \frac{f(x^*)}{2}$

donc $x(t) \geq x(T) + \int_T^t \frac{f(x^*)}{2}\,ds = x(T) + (t-T)\frac{f(x^*)}{2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci contredit $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x^*$, donc $f(x^*) = 0$.

3) $\sup J = +\infty$: même argument.

$g(x^*) = 0$: notons $X = (x_1, \dots, x_d)$ et $g(X) = (g_1(X), \dots, g_d(X))$.

Si $g(x^*) \neq 0$, il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $g_i(x^*) \neq 0$, par exemple $g_i(x^*) > 0$ (le cas $g_i(x^*) < 0$ est similaire). On a comme en 2) $X'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} g(x^*)$ donc $x_i'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} g_i(x^*)$. Le raisonnement de 2) montre que $x_i(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, contredisant $X(t) \to x^*$. Donc $g(x^*) = 0$.

L'hypothèse g C^1 est utilisée pour montrer $\sup J = +\infty$ car dans le cours le théorème de l'alternative d'explosion suppose ~~f~~ g C^1.

En fait ce théorème est encore vrai avec g C^0 donc ~~toute~~ les ~~la partie 1 marcherait~~ résultats sont vrais avec g simplement C^0.

Partie 2 :

1) Si $E_+ \neq \emptyset$ alors E_+ est non vide et minoré par x_0 donc $\inf E_+$ existe (on ne demandait pas de le justifier). De plus, E_+ est fermé comme intersection du fermé $[x_0 ; +\infty[$ et de $\{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$ $= f^{-1}(\{0\})$ qui est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Donc $x_+ \in E_+$.

(On peut aussi dire : il existe (x_n) tel que $\begin{cases} x_n \in E_+, \forall n \\ x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_+ \end{cases}$

et par continuité de f, $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x_+)$ or $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f(x_+) = 0$.)

Même argument pour x_-.

2) vu en cours. (x_0 est alors un équilibre)

3) a) S'il existe $t \in J$ tel que $f(x(t)) \leq 0$ alors par continuité de $f \circ x$ et TVI, il existe t_1 entre t et t_0 tel que $f(x(t_1)) = 0$. En posant $x_1 = x(t_1)$ et en appliquant le 2), on obtient que $x(t) = x_1$ pour tout t dans J, donc ~~$x_0 = x_1$~~ $x_0 = x(t_0) = x_1$ donc $f(x_0) = f(x_1) = 0$, contredisant $f(x_0) > 0$. Donc pour tout $t \in J$, $f(x(t)) > 0$.
Or $x'(t) = f(x(t))$ donc $x'(t) > 0$, donc $x(\cdot)$ strictement croissante.

b) Supposons qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} x^*$. Comme $x(\cdot)$ est strictement croissante, on a $x^* > x_0$, et de plus $f(x^*) = 0$ d'après la partie 1, question 2). Donc $x^* \in E_+$, contredit $E_+ = \emptyset$.
Or $x(\cdot)$ est strictement croissante, donc soit $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} +\infty$, soit il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} x^*$. Ce dernier cas étant impossible, on a $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} +\infty$.

c). Soit $(\tilde{J}, y(\cdot))$ la solution maximale de $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t_0) = x_+ \end{cases}$

D'après 2), $\tilde{J} = \mathbb{R}$ et $y(t) = x_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Or $x(t_0) < y(t_0)$ donc d'après un corollaire de Cauchy-Lipschitz, $x(t) < y(t) = x_+$ sur $J \cap \tilde{J} = J \cap \mathbb{R} = J$. Comme de plus $x(\cdot)$ est strictement croissante on a pour tout $t \in]t_0, \sup J[$:

$x_0 = x(t_0) < x(t) < x_+$, donc $\|x(t)\|$ est bornée au voisinage de $\sup J$, donc par l'alternative d'explosion, $\sup J = +\infty$. Comme $x(\cdot)$ est croissante et majorée, il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x^*$. ~~De plus, comme $x(\cdot)$ est strictement croissante~~ et $x(t) < x_+$ pour tout t, on a :

~~pour tout $t > t_1 > t_0$, pour tout~~

Soit $t_1 > t_0$. Comme $x(\cdot)$ est strictement croissante et $x(t) < x_+$ pour tout $t \in J$, on a pour tout $t > t_1$:

$x_0 = x(t_0) < x(t_1) < x(t) < x_+$ donc $x_0 < x(t_1) \leq x^* \leq x_+$.

donc $x^* \in]x_0, x_+]$. Comme $x^* \in \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$ par la partie 1, on a $\begin{cases} x^* > x_0 \\ f(x^*) = 0 \end{cases}$ donc $x^* \in E_+$ or $x^* \leq x_+$, donc $x^* = x_+$ par définition de x_+. Donc $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_+$.

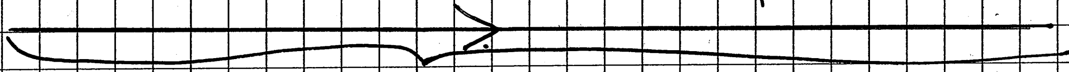
d) Dans le cas $f(x_0) < 0$, on obtiendrait :

Si $E_- = \emptyset$, alors $x(t) \xrightarrow[t \to \sup J]{} -\infty$, sinon $\sup J = +\infty$ et $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_-$.

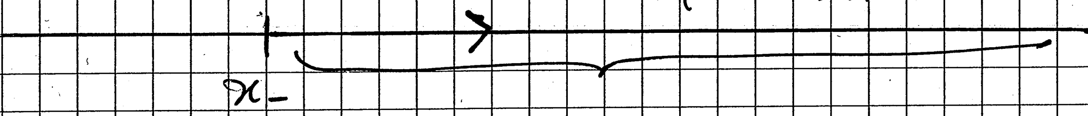
Si $E_+ = \emptyset$, alors $x(t) \xrightarrow[t \to \inf J]{} +\infty$, sinon $\inf J = -\infty$ et $x(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} x_+$

4) a)

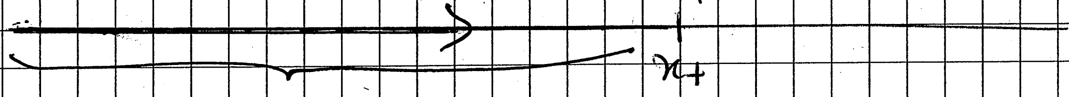
i) trajectoire : $\mathbb{R}$



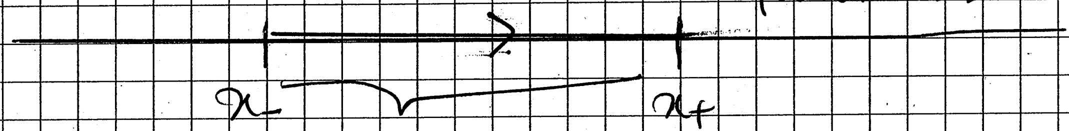
ii) trajectoire : $]x_- ; +\infty[$



iii) trajectoire : $]-\infty ; x_+[$



iv) trajectoire : $]x_- , x_+[$



b) Si $f(x_0) < 0$ les trajectoires sont les mêmes, mais parcourues dans le sens opposé. ~~De~~ Même chose pour l'équation $x'(t) = -f(x(t))$.

5) A part le fait que f est C^1, seul ~~le~~ le signe de f (via l'ensemble des équilibres et le ~~le~~ signe de $f(x_0)$) a été utilisé dans les questions précédentes. ~~Cela~~ Donc ~~que~~ toute fonction C^1 qui a même signe que f a le même portrait de phase.

6) Le fait que f soit C^1 n'implique pas que $f^{1/3}$ le soit. Donc on peut perdre le caractère C^1 et du coup l'unicité dans Cauchy-Lipschitz. Or sans unicité, la notion même de portrait de phase est à redéfinir (et même alors les portraits de phase de f et de $f^{1/3}$ ne seront pas les mêmes).

Ex : $x'(t) = x(t)$ et $x'(t) = x^{1/3}(t)$. On montre (voir TD pour la méthode) que pour la seconde $\mathbb{R}_+$ est une trajectoire associée à une solution maximale, mais pas pour la première

(Remarquer que $x(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $x(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2}$ si $t \geq 0$.
est solution de $x'(t) = (x(t))^{1/3}$.

Partie 3 :

1) Soit $V =]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$. Soit $(J, x(\cdot))$ une solution maximale.
Supposons qu'il existe $t_0 \in J$ tel que $x(t_0) \in J$. (N.B. : je reprends ici les définitions données dans le cours, mais on a vu depuis qu'on pourrait sans perte de généralité prendre $t_0 = 0$).
Soit $x_0 = x(t_0)$. D'après la partie 2 :

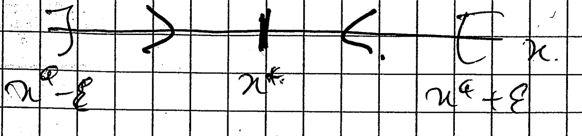
- Si $x_0 = x^*$, donc $f(x_0) = 0$, $J = \mathbb{R}$ et $x(t) = x_0 = x^*$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
En particulier $\sup J = +\infty$ et $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x^*$.

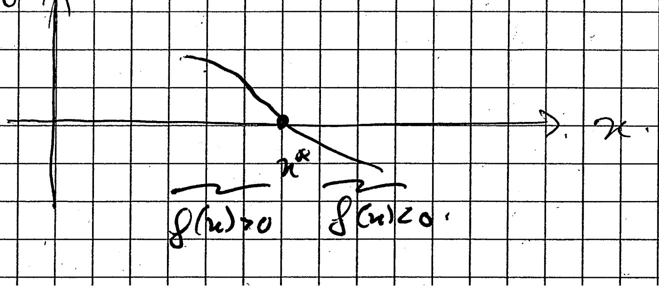
- Si $x_0 \in]x^* - \varepsilon, x^*[$, donc $f(x_0) > 0$. Alors comme $x_+ = x^*$
(car $f(x) > 0$ sur $]x^* - \varepsilon, x^*[$, donc pas d'équilibre entre x_0 et x^*).
on a $\sup J = +\infty$ et $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x^*$.

- Si $x_0 \in]x^*, x^* + \varepsilon[$, donc $f(x_0) < 0$. Alors $x_- = x^*$,
$\sup J = +\infty$ et $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x^*$.

Dans tous les cas, $\sup J = +\infty$ et $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x^*$, donc x^* est attractif.

Si $f'(x^*) < 0$ alors comme au voisinage de x^*,
$$f(x) - f(x^*) \sim f'(x^*) \quad (x - x^*) \quad (\text{car } f'(x^*) \neq 0)$$
et que $f(x^*) = 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) > 0$ sur $]x^* - \varepsilon, x^*[$
et $f(x) < 0$ sur $]x^*, x^* + \varepsilon[$, donc x^* est attractif d'après le résultat précédent.





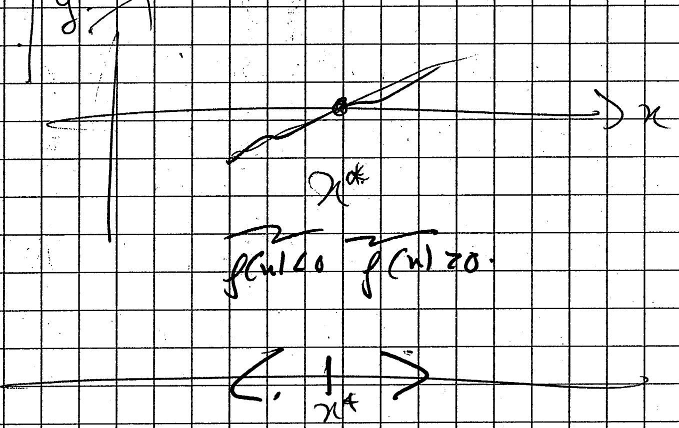
2) De même, si $f'(x^*) > 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) < 0$ sur $]x^* - \varepsilon, x^*[$ et $f(x) > 0$ sur $]x^*, x^* + \varepsilon[$. Soit $V =]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$. Soit $(J, x(\cdot))$ solution maximale et $t_0 \in J$ tel que $x(t_0) \in V \setminus \{x^*\}$. Soit $x_0 = x(t_0)$.

Si $x_0 \in]x^* - \varepsilon, x^*[$, alors soit $E_- = \emptyset$ et $x(t) \xrightarrow[t \to \sup J]{} -\infty$,

~~donc~~ soit $E_- \neq \emptyset$ et ~~$x(t) \to$~~ alors $\sup J = +\infty$ et $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_-$.

Comme dans ce cas $x_- \notin V$ et que V est ouvert, on a dans tous les cas : il existe $T \in J$ tel que, pour tout $t \geq T$ tel que $t \in J$, $x(t) \notin V$. On montre de même que si $x_0 \in]x^*, x^* + \varepsilon[$, soit $x(t) \xrightarrow[t \to \sup J]{} +\infty$, soit $x(t) \xrightarrow[t \to \sup J]{} x_+ \notin V$, et donc il existe $T \in J$ tel que pour tout $t \geq T$, et t dans J, $x(t) \notin V$.

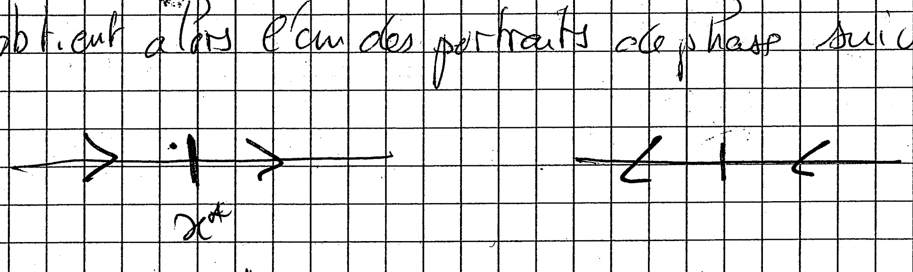
Donc x^* est répulsif.



---

3) Si $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) \neq 0$, alors soit $f''(x) > 0$ donc $f(x) > 0$ ~~sur pour~~ pour tout $x \neq x^*$ dans un voisinage de x^*, soit $f''(x) < 0$ donc $f(x) < 0$ pour tout $x \neq x^*$ au voisinage de x^*.

On obtient alors l'un des portraits de phase suivants :



Dans les 2 cas, on montre facilement que x^* n'est ni attractif ni répulsif.

Si $f''(x^*)=0$, il faut regarder les dérivées d'ordre supérieur (si elles existent !) ou déterminer autrement le signe de f au voisinage de x^* pour savoir si x^* est attractif, répulsif, ou ni l'un ni l'autre.

Partie 4 : 1) Même portrait de phase : voir partie 2, question 5).

Solutions de $x'(t)=x(t)$: $(\mathbb{R}, t \mapsto \lambda e^t)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solutions de $x'(t)=x^3(t)$: $(\mathbb{R}, t\mapsto 0)$, $\left(]-\infty; K/2[, t \mapsto \frac{1}{\sqrt{K-2t}}\right)$

et $\left(]-\infty; K/2[, t\mapsto -\frac{1}{\sqrt{K-2t}}\right)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Les solutions non nulles explosent du côté des temps "positifs", en $t=K/2$ ($\frac{1}{2x_0^2}+t_0$).

Rq : autre formule pour les solutions de $x'(t)=x^3(t)$: $(\mathbb{R}, t\mapsto 0)$

et $\left(]-\infty, \frac{1}{2x_0^2}-t_0[, t \mapsto \frac{x_0}{\sqrt{1-2x_0^2(t-t_0)}}\right)$

qui donne la solution telle que $x(t_0)=x_0$.

↳ "le signe de f détermine le portrait de phase, mais pas si les solutions explosent ou non"

2) a) $(J, x(\cdot))$ est solution de $\begin{cases} x'(t)=f(x(t)) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$

Comme de plus $x(t) \xrightarrow[t\to\sup J]{} +\infty$, on est dans le cas $f(x_0)>0$. On aura que $f(x(t))>0$ sur J (partie 2, question 3a). Donc sur J :

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1 \text{ donc } \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{f(x(s))}\,ds = \int_{t_0}^{t} 1\, ds = t-t_0.$$

En faisant le changement de variable $u = x(s)$, on obtient :

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{f(u)}\, du = t - t_0 \quad , \text{avec } x(t_0) = x_0.$$

b) Quand $t \to \sup J$, $t - t_0 \to \sup J - t_0$ (avec la convention, le cas échéant, ~~sup~~ $+\infty - t_0 = +\infty$), et par ailleurs ~~x_0~~ $x(t) \to +\infty$, ~~avec $x(t)$ continue et croissante~~,

donc $\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(u)}\, du \longrightarrow \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)}\, du$.

(on utilise implicitement que ~~tout $u \in]x_0, +\infty[$~~ pour tout $u \in]x_0 ; +\infty[$, il existe $t \in]t_0, \sup J[$ tel que $x(t) = u$ et donc comme $f(x(t)) > 0$ sur J, on a $f(u) > 0$. Donc $f(u) > 0$ sur $]x_0 ; +\infty[$, si bien que l'intégrale entre x_0 et $+\infty$ a bien un sens si l'on admet la valeur $+\infty$).

On a donc : $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)}\, du = \sup J - t_0$.

Donc $\sup J < +\infty \iff \displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)}\, du < +\infty$.

c) Dans le cas $f(x) = \dfrac{x^\alpha}{1+x^2}$ avec $\alpha \geq 1$, f est C^1 sur $\mathbb{R}$

et si $x(0) = 1$ alors $f(x(0)) > 0$ donc $\underset{t \to \sup J}{x(t) \to +\infty}$.

~~Or en $+\infty$, $\dfrac{x^\alpha}{1+x^2} \sim x^{\alpha-2}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\, dx < +\infty$~~

~~$\iff \alpha$~~

et pour $v \geq 0$, $\frac{1}{f(v)} = \frac{1+v^2}{v^{\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} v^{2-\alpha}$

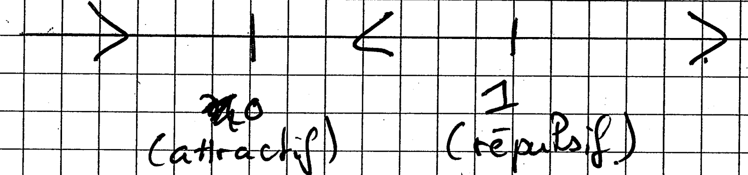
donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(v)} dv < +\infty \iff 2-\alpha < -1$

$\iff \alpha > 3$.

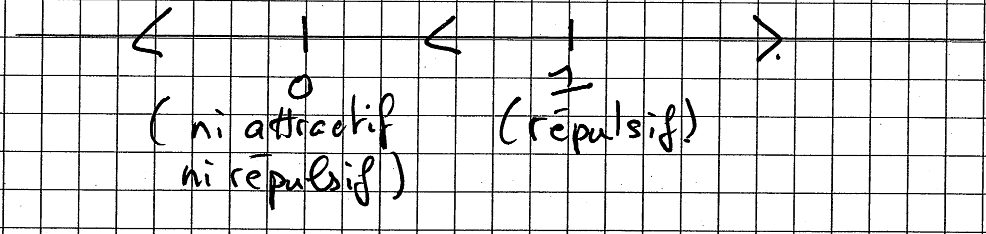
Donc la solution explose (i.e. $\sup J < +\infty$) si et seulement si $\alpha > 3$.

<u>Rq</u> : du côté des temps négatifs, d'après la partie 2), $\inf J = -\infty$ et $x(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la solution ne peut exploser que du côté des temps positifs.

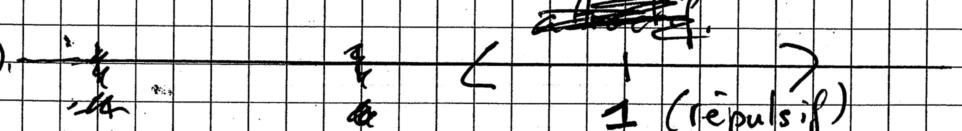
<u>Partie 5</u> :

a) 

$f(x) = x(x-1)$

b) 

$f(x) = x^2(x-1)$

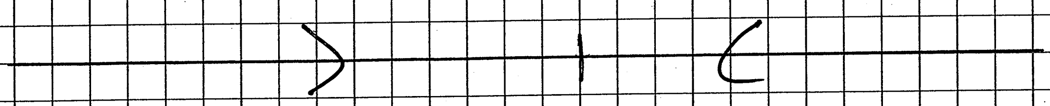
c) 

$f(x) = x^3 - 1$

La solution telle que $x(0) = 2$ explose car $f(x(0)) > 0$ et $E_+ = \emptyset$

donc $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} +\infty$ et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} < +\infty$.

d)

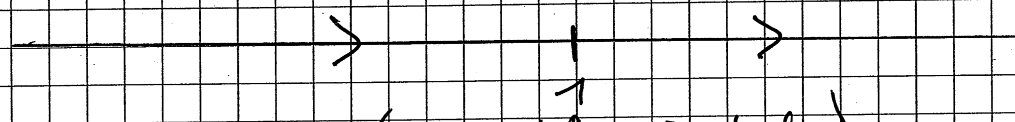


$f(x) = 1 - x^3$

1

(attractif)

e)

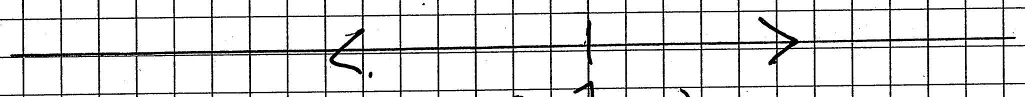


$f(x) = (x^3 - 1)^2$

1

(ni attractif ni répulsif)

f)



$f(x) = \frac{x^3-1}{1+x^2}$

1

(répulsif)

La solution telle que $x(0) = 2$ n'explose pas : on a $x(t) \xrightarrow[t \to \sup J]{} +\infty$

mais $\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(u)}\, du = \int_2^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3-1}\, dx = +\infty$.

Car $\frac{1+x^2}{x^3-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\int \frac{1}{x}\, dx = +\infty$.

Exploser = tendre en norme vers $+\infty$ avant "d'atteindre la borne" de l'intervalle de temps I sur lequel est défini l'équation (et en particulier en temps fini).