Systèmes différentiels 2012-2013. Corrigé du partiel du 08 mars 2013

Ex 1 :

1) Critère de non explosion : soit $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1, où I est un intervalle d'intérieur non vide. Soit $(J, x(\cdot))$ une solution maximale de $x'(t) = f(t, x(t))$ et $t_0 \in J$. Soit $w : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

i) Si $\|x(t)\| \leq w(t)$ sur $[t_0; +\infty[\cap J$ alors $\sup J = \sup I$.

ii) ——————— $]-\infty; t_0] \cap J$ ——— $\inf J = \inf I$.

iii) ——————— sur J alors $J = I$.

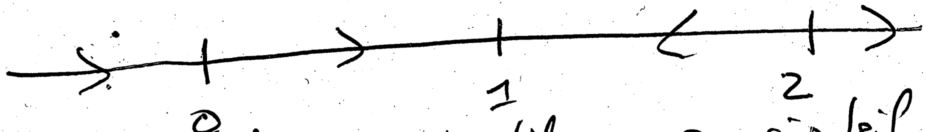
Version intégrale du lemme de Gronwall :

Soient $T \geq 0$ et $a(\cdot), b(\cdot), u(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R})$, avec $a(\cdot) \geq 0$.
Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0 \geq u_0$. Si sur $[0,T]$, $\cancel{v(t) \leq v_0 + \int_0^t f(s, v(s))\,ds}$
$u(t) \leq u_0 + \int_0^t (a(s)u(s) + b(s))\,ds$ alors sur $[0,T]$, $u(t) \leq v(t)$ où $v(\cdot)$ est la solution de $\begin{cases} v'(t) = a(t)v(t) + b(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$.

2) On résoud d'abord : $x'(t) = x(t) + e^t$. La solution générale de l'équation sans second membre est $x(t) = \lambda e^t$. On cherche donc les solutions sous la forme $x(t) = \lambda(t) e^t$ (méthode de variation de la constante).
On obtient : $x(\cdot)$ solution $\Leftrightarrow \lambda'(t) e^t = e^t \Leftrightarrow \lambda'(t) = 1 \Leftrightarrow \lambda(t) = \lambda_0 + t$
$\Leftrightarrow x(t) = (\lambda_0 + t) e^t$. On résoud maintenant le problème de Cauchy
$\begin{cases} x'(t) = x(t) + e^t \\ x(0) = 3 \end{cases}$. La condition initiale impose $\lambda_0 = 3$. De plus, c'est une équation linéaire donc (sous entendu depuis le début), les solutions sont globales. La solution est donc $(\mathbb{R}, t \mapsto (3+t)e^t)$.

Rq : on peut bien sûr aussi appliquer la formule de Duhamel.

3)



0 : ni attractif ni répulsif 1 : attractif 2 : répulsif.

N.B : ne pas en mettre des tartines quand aucune justification n'est demandée !

Exercice 2 :

1) Comme $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$ est solution de $y'(t) = -\frac{y^2(t)}{2}$, les autres solutions ne s'annulent pas. Or $y_0 < 0$, donc la solution $(J, y(\cdot))$ de $\begin{cases} y'(t) = -\frac{y^2(t)}{2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ n'est pas $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$ et donc $y(t) \neq 0$ $\forall t \in J$.

Par séparation des variables on a sur J : $-\frac{y'}{y^2}(t) = \frac{1}{2}$ d'où $\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{2}(t - t_0)$

d'où $y(t) = \frac{2y_0}{2 + y_0(t - t_0)}$. Soit T tel que $2 + y_0(T - t_0) = 0$, c'est-à-dire

$T = t_0 - \frac{2}{y_0}$ ($T > t_0$ car $y_0 < 0$). Comme la solution est définie en $t_0 < T$ et tend vers $-\infty$ en T on a $J \subset]-\infty, T[$, et comme la formule donne une solution sur tout $]-\infty, T[$ on a $J =]-\infty, T[$.

Bilan : la solution est $\left( ]-\infty, T[, t \mapsto \frac{2y_0}{2 + y_0(t - t_0)} \right)$. Elle n'est pas globale : elle explose en $T > t_0$.

2) Supposons par l'absurde que $\sup J_x = +\infty$. Alors $x(\cdot)$ est défini en $\sup J_y$ et par continuité de $x(\cdot)$ en $\sup J_y$: $x(t) \underset{t \to (\sup J_y)^-}{\longrightarrow} x(\sup J_y) \in \mathbb{R}$.

Mais $x(t) \leq y(t)$ sur $J_x \cap J_y \cap [t_0, +\infty[$, donc sur $[t_0, \sup J_y[$ (car $\sup J_x = +\infty$). Donc comme $y(t) \underset{t \to \sup J_y}{\longrightarrow} -\infty$, $x(t) \underset{t \to (\sup J_y)^-}{\longrightarrow} -\infty$.

Contradiction.

3) 3a) On a : $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} -\infty$ (faire le portrait de phase en rajoutant $x(0) < 0$).

Or $x(k - x) \underset{-\infty}{\sim} -x^2$. Il existe donc $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \leq \bar{x}$, $x(k - x) \leq -\frac{1}{2}x^2$. Comme $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} -\infty$, il existe $T \in J$ tel que, pour tout $t \geq T$, $x(t) \leq \bar{x}$ et donc $x'(t) = x(t)(k - x(t)) \leq -\frac{1}{2}x^2(t)$.

<u>Rq</u> : ce qui précède est ce que j'avais en tête en posant l'énoncé. Comme il y avait plus simple : comme beaucoup d'entre vous l'ont remarqué, $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$ est solution de $x'(t) = x(t)(k - x(t))$ et que $x(0) < 0$, on a $x(t) < 0$ sur J et donc sur J : $x'(t) = x(t)(k - x(t)) = -x^2(t) + \underbrace{k}_{\geq 0}\underbrace{x(t)}_{< 0} < -x^2(t) < -\frac{1}{2}x^2(t)$

3b). Sans perte de généralité, on peut supposer $\bar{x} < 0$. Soit alors $v(\cdot) : J_v \to \mathbb{R}$ la solution maximale de $\begin{cases} v'(t) = -\frac{1}{2}v^2(t) \\ v(T) = x(T). \end{cases}$

D'après 1) et $v(T) = x(T) \leq \bar{x} < 0$, on a $\sup J_v < +\infty$.
D'après le principe de comparaison et 3a), on a $x(t) \leq v(t)$ sur $[T, +\infty[\cap J \cap J_v$.
D'après 2) on a donc $\sup J < +\infty$.

<u>Rq:</u> on pouvait aussi utiliser le fait que $x^2 = x^{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon \geq 0$ et le critère du cours, mais après un changement de variable ~~(changement de temps)~~ car le cours traite seulement le cas de l'explosion vers $+\infty$ en $\sup J$.

3c) Comme $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$ est solution de $x'(t) = x(t)(K - x(t))$ et que $x(0) \neq 0$, $x(t) \neq 0$ sur J et on peut poser $v(t) = \frac{1}{x(t)}$. La fonction $v(\cdot)$ vérifie : $v'(t) = -\frac{x'(t)}{x^2(t)} = -\frac{x(t)(K - x(t))}{x^2(t)} = -Kv(t) + 1$. C'est une équation linéaire. Une solution particulière est donnée par $v(t) = \frac{1}{K}$.
La solution générale est donc $v(t) = \lambda e^{-Kt} + \frac{1}{K}$. On a donc
$x(t) = \frac{1}{v(t)} = \frac{1}{\lambda e^{-Kt} + \frac{1}{K}}$, et comme $x(0) = -1$ on obtient $\lambda = -\left(\frac{1+K}{K}\right)$.
En réarrangeant, on obtient finalement : $x(t) = \frac{K}{1 - (1+K)e^{-Kt}}$.
On remarque que $1 - (1+K)e^{-Kt} = 0$
$\Leftrightarrow (1+K)e^{-Kt} = 1 \Leftrightarrow -Kt = -\ln(1+K) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(1+K)}{K}$.
Soit $T^* = \frac{\ln(1+K)}{K}$ ($T^* > 0$ car $K > 0$). ~~On a~~ On vérifie que la formule donnée est solution sur $]-\infty, T^*[$, et comme $x(t) \underset{t \to T^*}{\longrightarrow} -\infty$, on a $J \subset]-\infty, T^*[$ donc $J =]-\infty, T^*[$.
<u>Bilan</u> : la solution est $\left( ]-\infty, T^*[, \ t \mapsto \frac{K}{1-(1+K)e^{-Kt}} \right)$.

<u>Remarque</u> : il fallait bien penser à préciser l'intervalle de définition (on peut donner moins de détails, mais au minimum dire que $J =]-\infty, T[$ où T est l'unique solution (vérifier qu'elle est unique !) de $1 - (1+K)e^{-KT} = 0$).

Exercice 3 : Attention : l'équation n'est pas autonome. En particulier, les résultats du devoir ne s'appliquent pas directement.

1. E est vide de manière évidente. De plus pour tout $t \in J$, $x'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ donc $x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{1}{1+s^2} ds$. Or $\frac{1}{1+s^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{s^2}$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds$ est absolument convergente. Donc $x(t)$ est bornée au voisinage de $\sup J$, donc $\sup J = +\infty$ et $x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} x^* = x_0 + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds \in \mathbb{R}$

Rq1 : préciser que $\sup J = +\infty$ n'est pas obligatoire. On peut dire : $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} x_0 + \int_0^{\sup J} \frac{1}{1+s^2} ds$

Rq2 : on pourrait aussi remarquer que l'intégrale se calcule, si bien que $x(t) = x_0 + \arctan t$. Le raisonnement précédent a l'avantage d'être très général, il utilise simplement que $\int_0^{+\infty} h(t) dt < +\infty$.

2. Supposons $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} x^*$, ce qui implique par l'alternative d'explosion que $\sup J = +\infty$.

Supposons par l'absurde $x^* \notin E$, i.e. $g(x^*) \neq 0$. Par exemple, $g(x^*) > 0$, le cas $g(x^*) < 0$ étant similaire. Soit $\eta = \frac{g(x^*)}{2} > 0$. Comme $x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} x^*$, on a $g(x(t)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} g(x^*)$ donc il existe $T \in J$ tel que pour tout $t \geq T$, $g(x(t)) \geq \eta$, donc $x'(t) \geq \eta h(t)$ donc $x(t) \geq x(T) + \eta \int_T^t h(s) ds \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\int_0^{+\infty} h(t) dt = +\infty$. Contradiction avec $x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} x^*$. Donc $g(x^*) = 0$, i.e. $x^* \in E$.

3. On a $x'(0) = \underbrace{g(x_0)}_{<0} \underbrace{h(0)}_{>0} < 0$ et $x'(\cdot)$ continue, donc s'il existe $t \in J$ tel que $x'(t) \geq 0$, par le TVI, il existe $t_1 \in J$ tel que $x'(t_1) = 0$ donc $g(x(t_1)) = 0$. Soit $x_1 = x(t_1)$. Comme $(\mathbb{R}, t \mapsto x_1)$ est solution de $\begin{cases} x'(t) = g(x(t)) h(t) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$ et que $(J, x(\cdot))$ le serait également, on aurait par unicité dans Cauchy-Lipschitz, $J = \mathbb{R}$ et $x(t) = x_1$ pour tout $t \in J$, donc $g(x_0) = g(x_1) = 0$. Contradiction.

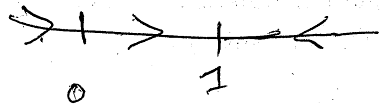
Donc $x'(t) < 0$ sur J donc $x(\cdot)$ est strictement décroissante. Donc soit il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} x^*$, soit $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} -\infty$. D'après 2), dans le premier cas $x^* \in E$, et comme $x(\cdot)$ est décroissante, $x^* \leq x_0$ donc $x^* \in E_-$. C'est impossible car $E_- = \emptyset$, donc $x(t) \underset{t \to \sup J}{\longrightarrow} -\infty$.

Ex 4.

1) $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$ est solution de $x'(t) = x^2(t)(1 - x(t) - e^{-t})$ donc les autres solutions ne s'annulent pas. par application de C-L, ~~or x(0)>0~~ et sont donc de signe constant par le TVI. Or $x(0) > 0$ donc $x(t) \geq 0$ pour tout $t \in J$.

2) Pour tout $t \in J$, on a : $x'(t) \leq x^2(t)(1 - x(t))$, Soit $(J_v, v(\cdot))$ la solution de $(\mathcal{E})$ $\begin{cases} v'(t) = v^2(t)(1 - v(t)) \\ v(0) = x(0) \end{cases}$ $(*)$ D'après le portrait de phase de

$(*)$:



, $v(t) \xrightarrow[t \to \sup J_v]{} 1$ donc $\sup J_v = +\infty$.

et par le principe de comparaison, pour tout $t \in J \cap \mathbb{R}_+$,

$x(t) \leq v(t)$. ~~donc $\lim_{t \to \sup}$~~ et donc $0 \leq x(t) \leq v(t)$.

Donc ; d'une part, $|x(t)| \leq v(t)$ sur $J \cap \mathbb{R}_+$, donc par le critère de non-explosion, $\sup J = +\infty$; d'autre part, $\limsup_{t \to +\infty} x(t) \leq \limsup_{t \to +\infty} v(t)$

$= \lim_{t \to +\infty} v(t) = 1$.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tq $e^{-T} \leq \varepsilon$. Pour tout $t \geq T$,

$x'(t) \geq x^2(t)(1 - x(t) - \varepsilon)$. Soit $(J_v, v(\cdot))$ la solution de.

$\begin{cases} v'(t) = v^2(t)(1 - v(t) - \varepsilon) \\ v(T) = x(T) > 0 \end{cases}$

Par les mêmes arguments qu'au 2), $\sup J_v = +\infty$, $v(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1 - \varepsilon$

et $x(t) \geq v(t)$ sur $[T; +\infty[$ donc $\liminf_{t \to +\infty} x(t) \geq \lim_{t \to +\infty} v(t) = 1 - \varepsilon$.

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\liminf_{t \to +\infty} x(t) \geq 1$, donc

$1 \leq \liminf_{t \to +\infty} x(t) \leq \limsup_{t \to +\infty} x(t) \leq 1$. Donc $\liminf_{t \to +\infty} x(t)$

$= \limsup_{t \to +\infty} x(t) = 1$ donc $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$.