

**Devoir : analyse qualitative de la compétition entre deux herbivores.**

Traiter les parties I, III et IV. La partie II ne pourra être traitée qu'après le cours sur la linéarisation.

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - x(t) - y(t))x(t), & x(0) = x_0 \geq 0, \\ y'(t) = (1 - x(t) - y(t))y(t), & y(0) = y_0 \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ce système d'équations différentielles peut s'interpréter ainsi :  $x(t)$  et  $y(t)$  représentent la densité de population de deux espèces d'herbivores en compétition. Lorsque ces densités sont très faibles, l'herbe est abondante et les taux de croissance sont de 2 pour la première espèce et de 1 pour la seconde. A cause du manque d'herbe, lorsque les densités de population ne sont pas négligeables, les taux de croissance sont réduits de  $x(t) + y(t)$ , et sont donc de  $2 - x(t) - y(t)$  et  $1 - x(t) - y(t)$ , respectivement. On remarque que le taux de croissance de la première espèce est toujours plus élevé que le taux de croissance de la seconde. On s'attend donc à ce qu'elle gagne la compétition, et que la deuxième espèce s'éteigne. C'est ce qu'on va montrer, de deux manières différentes.

**Partie I (généralités et principe de comparaison).**

- 1/. Montrer que (1) admet une unique solution maximale  $(J, (x(\cdot), y(\cdot)))$ .
- 2/. En utilisant la première équation, montrer que si  $x_0 = 0$  alors pour tout  $t \in J$ ,  $x(t) = 0$ , et que si  $x_0 > 0$ , alors pour tout  $t \in J$ ,  $x(t) > 0$ . Montrer de même que  $y(t) \geq 0$  pour tout  $t \in J$ , avec inégalité stricte si  $y_0 > 0$ .
- 3/. Montrer que, pour tout  $t \in J \cap \mathbb{R}_+$ ,  $x(t) \leq x_0 e^{2t}$  et  $y(t) \leq y_0 e^t$ . En déduire que  $\mathbb{R}_+ \subset J$ .
- 4/. Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x'(t) \leq (2 - x(t))x(t)$ . En déduire que  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq 2$ . Montrer de même que  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq 1$ .
- 5/. Dans les trois cas suivants, montrer que  $(x(t), y(t))$  converge quand  $t \rightarrow +\infty$  et déterminer sa limite :  
 (i)  $x_0 = y_0 = 0$  ; (ii)  $x_0 > 0, y_0 = 0$  ; (iii)  $x_0 = 0, y_0 > 0$ .

*Dans toute la suite du devoir, on suppose  $x_0 > 0$  et  $y_0 > 0$  si bien que, d'après la question 2/,  $x(t) > 0$  et  $y(t) > 0$  pour tout  $t$  dans  $J$ .*

**Partie II (stabilité des équilibres)** Quels sont les trois équilibres du système ? Pour chaque équilibre  $(x^*, y^*)$  : déterminer le système linéarisé en ce point en précisant s'il est hyperbolique ainsi que la nature (source, puits, foyer,...) et la stabilité (instable, stable, asymptotiquement stable) de  $(0, 0)$  pour le système linéarisé ; que peut-on en déduire sur la stabilité de l'équilibre  $(x^*, y^*)$  du système initial ?

**Partie III (isoclines et directions du mouvement).**

On donne des noms à différentes zones de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ , de telle sorte que l'appartenance de  $(x(t), y(t))$  à l'une de ces zones détermine le signe de  $x'(t)$  et de  $y'(t)$  et donc la direction générale du mouvement. On pose :

$$A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 | x + y < 1\} ; B = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 | x + y = 1\} ; C = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 | 1 < x + y < 2\} ; D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : x + y = 2\} ; E = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 | x + y > 2\}.$$

0/. A faire par les chargés de TD : représenter graphiquement ces différentes zones et la direction générale du mouvement dans ces zones ainsi que sur la partie des axes située dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

1/. Cas 1 : s'il existe  $t_c \in \mathbb{R}_+$  tel que  $(x(t_c), y(t_c)) \in C$ .

a) On veut montrer que  $(x(t), y(t)) \in C$  pour tout  $t \geq t_c$ . Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Soit  $T$  le premier instant après  $t_c$  tel que  $(x(T), y(T)) \notin C$ , i.e. tel que  $(x(t), y(t)) \in C$  sur  $[t_c, T[$  et  $(x(T), y(T)) \notin C$  (l'existence de ce premier instant se montre en utilisant un type de raisonnement vu au TD1).

a1) Montrer que  $(x(T), y(T)) \in B \cup D$ .

a2) Supposons  $(x(T), y(T)) \in B$ . Soit  $v(t) = x(t) + y(t)$ . Montrer que  $v(T) = 1$  et  $v'(T) > 0$ . En déduire qu'il existe  $t \in ]t_c, T[$  tel que  $(x(t), y(t)) \in A$  et aboutir à une contradiction. Montrer de même qu'on ne peut pas avoir  $(x(T), y(T)) \in D$ .

a3) En déduire que  $(x(t), y(t)) \in C$  pour tout  $t \geq t_c$ .

b) En déduire que sur  $[t_c, +\infty[$ ,  $x(\cdot)$  est croissante et  $y(\cdot)$  décroissante, puis qu'il existe  $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $x^* \geq x(t_c)$ ,  $y^* \leq y(t_c)$  et  $(x(t), y(t)) \rightarrow (x^*, y^*)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Pourquoi  $(x^*, y^*)$  est-il forcément un équilibre ?

c) Montrer que  $(x(t), y(t)) \rightarrow (2, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

2/. Cas 2 et 2bis : s'il existe  $t_b \in \mathbb{R}_+$  tel que  $(x(t_b), y(t_b)) \in B$  ou  $t_d \in \mathbb{R}_+$  tel que  $(x(t_d), y(t_d)) \in D$ . En étudiant l'évolution de  $v(t) = x(t) + y(t)$ , montrer qu'il existe  $t_c \in \mathbb{R}_+$  tel que  $(x(t_c), y(t_c)) \in C$ . En déduire que  $(x(t), y(t)) \rightarrow (2, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

3/. Cas 3 : s'il existe  $t_a \in \mathbb{R}_+$  tel que  $(x(t_a), y(t_a)) \in A$ .

a) Supposons que  $(x(t), y(t)) \in A$  pour tout  $t \geq t_a$ . Montrer que pour tout  $t \geq t_a$ ,  $x(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  sont croissantes. En déduire qu'il existe  $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $x^* \geq x(t_a)$ ,  $y^* \geq y(t_a)$  et  $(x(t), y(t)) \rightarrow (x^*, y^*)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

b) En déduire qu'il existe  $t \geq t_a$  tel que  $(x(t), y(t)) \notin A$ .

c) Soit  $T$  le premier temps après  $t_a$  auquel  $(x(t), y(t)) \notin A$ . Montrer que  $(x(T), y(T)) \in B$ . En déduire que  $(x(t), y(t)) \rightarrow (2, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

4/. Cas 4 : s'il existe  $t_e \in \mathbb{R}_+$  tel que  $(x(t_e), y(t_e)) \in E$ . Montrer que si  $(x(t), y(t)) \in E$  pour tout  $t \geq t_e$  alors  $(x(t), y(t)) \rightarrow (2, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , et que sinon, il existe  $T \in \mathbb{R}_+$  tel que  $(x(T), y(T)) \in D$ . En déduire que  $(x(t), y(t)) \rightarrow (2, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

5/. En déduire que pour tout  $x_0 > 0$  et  $y_0 > 0$ ,  $(x(t), y(t)) \rightarrow (2, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**Partie IV (méthode de Lyapunov).** Dans cette partie, on redémontre que  $(x(t), y(t)) \rightarrow (2, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  par une autre méthode. On s'interdit donc d'utiliser la partie III.

1/. Soit  $w(t) = \ln(x(t)/y(t))$ . Montrer que pour tout  $t \in J$ ,  $w'(t) = 1$ . En déduire que  $x(t)/y(t) \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . En utilisant la partie 1, en déduire que  $y(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

2/. Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe  $T_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $t \geq T_\varepsilon$ ,  $x'(t) \geq x(t)(2 - \varepsilon - x(t))$ . En déduire que  $\liminf x(t) \geq 2 - \varepsilon$  puis, en utilisant la partie 1, que  $x(t) \rightarrow 2$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .