**Devoir : résolution qualitative des équations autonomes en dimension 1.**

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$, et $t_0$ et $x_0$ des réels. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{E}$$

et le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{C}$$

Dans tout le devoir "solution" veut dire "solution maximale"

**Partie 1 (importance des équilibres).**

Soit $(J, x(\cdot))$ une solution de (E) et $x^* \in \mathbb{R}$. On suppose que $x(t) \to x^*$ quand $t \to \sup J$. On veut montrer que $f(x^*) = 0$.

1) Montrer que $\sup J = +\infty$ puis que $f(x(t)) \to f(x^*)$ quand $t \to +\infty$.

2) Supposons par l'absurde que $f(x^*) \neq 0$, par exemple $f(x^*) > 0$ (le cas $f(x^*) < 0$ est analogue). Montrer qu'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq T$, $x'(t) \geq f(x^*)/2$. En déduire que $x(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Aboutir à une contradiction et conclure.

3) Montrer le résultat plus général suivant : soit $X^* \in \mathbb{R}^d$ et $(J, X(\cdot))$ une solution de l'équation autonome $X'(t) = g(X(t))$ avec $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe $C^1$. Si $X(t) \to X^*$ quand $t \to \sup J$ alors $\sup J = +\infty$ et $g(X^*) = 0$. A quoi sert l'hypothèse $g$ de classe $C^1$ (plutôt que $C^0$) ?

**Partie 2 (portrait de phase).**

Soit $(J, x(\cdot))$ une solution de (C). Soit $E_+ = \{x \in [x_0, +\infty[, f(x) = 0\}$ l'ensemble des équilibres plus grands que $x_0$ et $E_- = \{x \in ]-\infty, x_0], f(x) = 0\}$ l'ensemble des équilibres plus petits que $x_0$. Si $E_+ \neq \emptyset$ (resp. $E_- \neq \emptyset$), on pose $x_+ = \inf E_+$ (resp. $x_- = \sup E_-$).

1) Montrer que si $E_+ \neq \emptyset$, alors $f(x_+) = 0$, si bien que $x_+$ est le plus petit équilibre plus grand que $x_0$. Montrer de même que quand $E_-$ est non vide, $x_-$ est le plus grand équilibre plus petit que $x_0$.

2) Montrer que si $f(x_0) = 0$ alors $J = \mathbb{R}$ et pour tout réel $t$, $x(t) = x_0$.

3) On suppose $f(x_0) > 0$.

a) Montrer que $f(x(t)) > 0$ pour tout $t$ dans $J$. En déduire que $x(\cdot)$ est strictement croissante.

b) On suppose $E_+ = \emptyset$. Montrer qu'il n'existe pas de réel $x^*$ tel que $x(t) \to x^*$ quand $t \to \sup J$. En déduire que $x(t) \to +\infty$ quand $t \to \sup J$.

c) On suppose $E_+ \neq \emptyset$. Montrer que $x(t) < x_+$ pour tout $t$ dans $J$. En déduire que $\sup J = +\infty$ puis qu'il existe $x^* \in ]x_0, x_+]$ tel que $x(t) \to x^*$ quand $t \to +\infty$. En déduire que $x(t) \to x_+$ quand $t \to +\infty$.

*Dans le cas $f(x_0) > 0$, on a donc montré que s'il y a pas d'équilibre plus grand que $x_0$, alors la solution tend vers $+\infty$ en $\sup J$ et que sinon, elle est définie jusqu'en $+\infty$ et tend vers le plus petit équilibre plus grand que $x_0$ quand $t \to +\infty$. On montre de manière similaire que s'il n'y a pas d'équilibre plus petit que $x_0$, alors la solution tend vers $-\infty$ en $\inf J$ et que sinon, elle est définie jusqu'en $-\infty$ et tend vers le plus grand équilibre plus petit que $x_0$ quand $t \to -\infty$.*

d) Enoncer les résultats qu'on obtiendrait de manière analogue dans le cas $f(x_0) < 0$.

4) a) On suppose $f(x_0) > 0$. Donner et représenter graphiquement la trajectoire associée à la solution $(J, x(\cdot))$ dans les quatre cas suivants :

i) $E_- = E_+ = \emptyset$ ;   ii) $E_- \neq \emptyset$, $E_+ = \emptyset$ ;   iii) $E_- = \emptyset$, $E_+ \neq \emptyset$ ;   iv) $E_- \neq \emptyset$, $E_+ \neq \emptyset$.

b) Quelles seraient les trajectoires si $f(x_0) < 0$ ? Pour l'équation différentielle $x'(t) = -f(x(t))$ ?

5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1$ telle que $f$ et $g$ ont toujours le même signe : $\forall x \in \mathbb{R}$, $sgn(g(x)) = sgn(f(x))$, où $sgn(x)$ vaut 0 si $x = 0$, 1 si $x > 0$ et $-1$ si $x < 0$. Par exemple, $g = f^3$. Expliquer pourquoi l'équation différentielle $x'(t) = g(x(t))$ a le même portrait de phase que (E).

6) L'équation différentielle $x'(t) = f^{1/3}(x(t))$ a-t-elle le même portrait de phase que (E) ?

**Partie 3 (stabilité des équilibres).**

Soit $x^*$ un équilibre de $(E)$, c'est à dire un réel tel que $f(x^*) = 0$ et $\varepsilon > 0$.

1) Montrer que si $f(x) > 0$ sur $]x^* - \varepsilon, x^*[$ et $f(x) < 0$ sur $]x^*, x^* + \varepsilon[$, alors $x^*$ est attractif. En déduire que si $f'(x^*) < 0$ alors $x^*$ est attractif. On pourra faire un schéma commenté.

2) Montrer que si $f'(x^*) > 0$ alors $x^*$ est répulsif.

3) Montrer que si $f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) \neq 0$, alors $x^*$ n'est ni attractif ni répulsif. Que peut-on dire si $f''(x^*) = 0$ ?

**Partie 4 (explosion ou non).**

1) Donner les solutions des équations différentielles $x'(t) = x(t)$ et $x'(t) = x^3(t)$. Vérifier qu'elles ont le même portrait de phase, mais que les solutions de la première sont globales alors que les solutions de la seconde explosent, à l'exception de la solution nulle.

2) Soit $(J, x(\cdot))$ la solution de (C). On suppose que $x(t) \to +\infty$ quand $t \to \sup J$.

a) Redémontrer que pour tout $t$ dans $J$, $\displaystyle\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(u)} du = t - t_0$

b) En déduire que :

$$\sup J < +\infty \Leftrightarrow \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{f(u)} du < +\infty.$$

c) Dans le cas $f(x) = x^\alpha/(1 + x^2)$, avec $\alpha \geq 1$, pour quelles valeurs de $\alpha$ la solution de (E) telle que $x(0) = 1$ explose-t-elle ?

**Partie 5 (application).**

Donner le portrait de phase de (E) dans les cas suivants, en précisant si les équilibres sont attractifs, répulsifs, ou ni l'un ni l'autre. Pour c) et f), dire si la solution telle que $x(0) = 2$ explose ou non.

a) $f(x) = x(x - 1)$ ;   b) $f(x) = x^2(x - 1)$ ;   c) $f(x) = x^3 - 1$ ;   d) $f(x) = 1 - x^3$ ;

e) $f(x) = (x^3 - 1)^2$;   f) $f(x) = (x^3 - 1)/(1 + x^2)$.