Partiel de systèmes différentiels.

Durée 2h. Documents et appareils électroniques interdit. Barème indicatif.

Exercice 1 (4pts [au final, 5pts])

- 1) Énoncer le critère de non-explosion et la version intégrale du lemme de Gronwall.
- 2) Résoudre le problème de Cauchy $x'(t) = x(t) + e^t$ et $x(0) = 3$.
- 3) Sans justifier, donner le portrait de phase de l'équation différentielle suivante, en précisant la nature des équilibres (attractif, répulsif, ni l'un ni l'autre) :

$$x'(t) = x^2(t)(x(t) - 1)(x(t) - 2)$$

Exercice 2 (7 pts [au final, 8pts])

- 1) Soient t_0 et y_0 des réels, tels que $y_0 < 0$. Résoudre explicitement le problème de Cauchy $y'(t) = -y^2(t)/2$ et $y(t_0) = y_0$. La solution est-elle globale ?
- 2) Soient $x : J_x \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : J_y \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues, où J_x et J_y sont des intervalles d'intersection non vide. Soit $t_0 \in J_x \cap J_y$. On suppose que: $\forall t \in J_x \cap J_y \cap [t_0, +\infty[, x(t) \leq y(t)$. Montrer que si $\sup J_y < +\infty$ et $y(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \sup J_y$ alors $\sup J_x < +\infty$.
- 3) Soit $(J, x(\cdot))$ la solution maximale de $x'(t) = x(t)(K - x(t))$ telle que $x(0) = -1$, où $K > 0$.

3a) Sans justifier, donner la limite de $x(t)$ quand $t \rightarrow \sup J$. En déduire qu'il existe $T \in J$ tel que pour tout $t \in J \cap [T, +\infty[, x'(t) \leq -\frac{1}{2}x(t)^2$.

3b) En déduire que $\sup J < +\infty$. On pourra utiliser les questions 1) et 2).

3c) Calculer explicitement $(J, x(\cdot))$. On pourra voir l'équation comme une équation de Bernoulli et poser $u(t) = 1/x(t)$.

Exercice 3 (5pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de la forme $f(t, x) = g(x)h(t)$, où g et h sont de classe C^1 et (important), pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) > 0$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $E = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$, et $E_- = E \cap]-\infty, x_0]$. Soit $(J, x(\cdot))$ la solution maximale de $x'(t) = f(t, x(t))$ telle que $x(0) = x_0$.

1. Dans le cas $g(x) = 1$, $h(t) = 1/(1 + t^2)$, montrer que $E = \emptyset$ mais qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \rightarrow x^*$ quand $t \rightarrow \sup J$.

Dans toute la suite, on suppose que $\int_0^{+\infty} h(t)dt = +\infty$.

2. Montrer que s'il existe $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) \rightarrow x^*$ quand $t \rightarrow \sup J$ alors $x^* \in E$.
3. On suppose $g(x_0) < 0$. Montrer que $x(\cdot)$ est strictement décroissante. En déduire que si $E_- = \emptyset$, alors $x(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \sup J$.

Exercice 4 (4pts) On considère l'équation différentielle $x'(t) = x^2(t)(1 - x(t) - e^{-t})$. Soit $(J, x(\cdot))$ une solution maximale définie en $t = 0$ et telle que $x(0) > 0$.

- 1) Montrer que $x(t) > 0$ pour tout $t \in J$.
- 2) Montrer que $\sup J = +\infty$ et que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq 1$.
- 3) Montrer que $x(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow +\infty$.