Université Paris-Dauphine — Partiel de systèmes différentiels — L3 Maths, 2011-2012

Durée 2h. Documents et appareils électroniques interdit. Barème purement indicatif.

Exercice 1 *(2,5pts)* Déterminer avec lucidité les solutions maximales des problèmes de Cauchy suivants:

a) $x'(t) = x(t) + t$, $x(0) = 0$ b) $x'(t) = x(t) + t$, $x(1) = 0$

c) $x'(t) = [t^2 + x^2(t)] \sin(x(t))$, $x(0) = 0$ d) $x'(t) = t + 1$, $x(0) = 0$.

Exercice 2 *(2pts)* Le problème de Cauchy $x'(t) = 2|x(t)|^{1/2}$ et $x(0) = 0$ a-t-il une unique solution maximale ? Quel est le lien entre votre réponse et le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Exercice 3 *(2,5pts)* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soient $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ deux solutions globales de $x'(t) = f(t, x(t))$. Soit (J, z) une solution maximale définie en 0 et telle que $x(0) < z(0) < y(0)$. Redémontrer que $J = \mathbb{R}$.

Exercice 4 *(2pts)* On considère l'équation différentielle $x'(t) = x^2(t) \sin x(t)$. Déterminer les équilibres et dire si toutes les solutions maximales sont globales.

Exercice 5 *(5pts)*

a) Suivant la valeur du réel p, donner sans justifier le portrait de phase de $x'(t) = x^2(t) + p$.

b) Dire, en justifiant, si la solution maximale du problème de Cauchy $x'(t) = x^2(t) - 4$ et $x(0) = 1$ est définie jusqu'en $+\infty$ et si elle est définie jusqu'en $-\infty$.

c) Même question pour le problème de Cauchy $x'(t) = x^2(t) + 4$ et $x(0) = 1$.

Exercice 6 *(6pts)* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy (C) :

$$(C) \qquad x'(t) = f(x(t)) \text{ et } x(0) = 0.$$

a) Que nous dit le théorème de Cauchy-Lipschitz sur le problème (C) ?

b) Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout réel x :

$$G(x) = \int_0^x \frac{1}{f(y)} dy$$

b1) Montrer que G induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $G(\mathbb{R})$. On note G^{-1} sa réciproque. Pourquoi G^{-1} est-elle de classe C^1 ?

b2) Montrer que $G(\mathbb{R})$ est ouvert. On pose $G(\mathbb{R}) =]\alpha, \beta[$ où α et β sont dans $\bar{\mathbb{R}}$.

c) Soit (J, x) une solution de (C). Redémontrer que pour tout $t \in J$, $G(x(t)) = t$. En déduire que $J \subset]\alpha, \beta[$.

d) Soit $\bar{x} :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ définie par $\bar{x}(t) = G^{-1}(t)$. Montrer que $\bar{x}$ est solution de (C) et que c'est l'unique solution maximale.