Durée 2h. Documents et appareils électroniques interdit. Barême (sur 21) purement indicatif.

Exercice 1 *(2pts)* Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

a) $x'(t) = 2x(t) - e^t$, $x(0) = 2$; b) $x'(t) = (x(t) - t^2)\cos(tx(t) + \pi/2)$, $x(0) = 0$.

Exercice 2 *(2,5pts)* On considère une équation différentielle autonome $x'(t) = f(x(t))$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit une solution maximale $(J, x(\cdot))$ telle qu'il existe des réels distinct t_0 et t_1 dans J tels que $x(t_0) = x(t_1)$. Montrer que $J = \mathbb{R}$ et que la fonction $x(\cdot)$ est constante.

Exercice 3 *(4pts)* Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

a) $x'(t) = x^2(t) - 1$, $x(0) = 1$; b) $x'(t) = x^2(t) - 1$, $x(0) = 0$; c) $x'(t) = x^2(t) - 1$, $x(0) = 2$.

(on pourra écrire $1/(x^2 - 1)$ sous la forme $a/(x - 1) + b/(x + 1)$).

Exercice 4 *(5pts)*

a) Résoudre le problème de Cauchy, $x'(t) = x^3(t)$ et $x(0) = 1$.

b) Sans justifier, donner en fonction de la valeur du paramètre réel q le portrait de phase de l'équation différentielle $x'(t) = x^3(t) - qx(t)$.

c) Soit $(]\alpha, \beta[, x(\cdot))$ la solution maximale du problème de Cauchy $x'(t) = x^3(t) - qx(t)$ et $x(0) = 1$. En fonction de la valeur de q, déterminer $\lim_{t\to\beta} x(t)$. Pour $q = 4$ et $q = -4$, dire si $\beta = +\infty$ ou non.

Exercice 5 *(7,5pts) Dans cet exercice, on s'interdit d'utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Soit $K \geq 0$, $d \in \mathbb{N}^*$ et$||\cdot||$ une norme fixée sur $\mathbb{R}^d$. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une application de classe C^1, K-Lipschitzienne par rapport à x:

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, ||f(t, x) - f(t, y)|| \leq K||x - y||$$

Soient $(J_1, x(\cdot))$ et $(J_2, y(\cdot))$ deux solutions de (1) définies en $t = 0$. Soit $J = J_1 \cap J_2$. Pour tout réel $t \in J$, on pose $z(t) = x(t) - y(t)$.

a) Montrer que pour tout réel $t \in J$, $||z(t)|| \leq ||z(0)|| + |\int_0^t K||z(s)||ds|$.

b) En déduire que pour tout réel $t \in J$, $||z(t)|| \leq ||z(0)||e^{K|t|}$.

(on pourra traiter d'abord le cas $t \geq 0$ puis, pour le cas $t \leq 0$, poser $w(t) = z(-t)$).

c) En déduire que pour tout intervalle J fixé, le problème de Cauchy (C): $x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(0) = 1$, a au plus une solution définie sur J.

d) On suppose que le problème (C) a deux solutions maximales distinctes $(J_1, x(\cdot))$ et $(J_2, y(\cdot))$. Soit $z : J_1 \cup J_2 \to \mathbb{R}^d$ telle que $z(t) = x(t)$ si $t \in J_1$ et $z(t) = y(t)$ si $t \in J_2 \backslash J_1$. Montrer que $(J_1 \cup J_2, z(\cdot))$ est solution de (C).

e) En déduire que le problème (C) a au plus une solution maximale.