Systèmes différentiels

Cours de YV, L3 Maths, Dauphine, 2012-2013

Plan du cours. Le cours a pour but de répondre aux questions suivantes :

- quand une équation différentielle a-t-elle une unique solution vérifiant une certaine condition initiale ?

- quand sait-on calculer explicitement les solutions d'une équation différentielle ?

- comment avoir une idée du graphe des solutions quand on ne sait pas les calculer ?

- comment résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires ?

- comment obtenir des informations sur le comportement local d'équations différentielles non linéaires en les approximant par des équations différentielles linéaires ?

- comment obtenir des informations sur le comportement global de solutions qu'on ne sait pas déterminer explicitement ?

Nous terminerons par des applications des équations différentielles en théorie des jeux.

1 Généralités, existence et unicité des solutions

Objectifs du chapitre :

i) Notions d'équation différentielle et de solution d'une équation différentielle d'ordre 1

ii) Conditions suffisantes simples pour l'existence et l'unicité de solutions avec condition initiale donnée.

iii) Comprendre comment une solution peut cesser d'être définie.

iv) Comprendre comment appliquer ces résultats aux équations d'ordre n.

1.1 Introduction

On s'intéresse à des systèmes (économiques, financiers, physiques, biologiques,...) dont l'état à l'instant t peut-être décrit par un certain nombre d de paramètres réels. Cet état est donc un point $X(t) = (x_1(t), ..., x_d(t))$ dans $\mathbb{R}^d$. Son évolution au cours du temps est décrit par une fonction $X(\cdot) : t \to X(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (la notation $X(\cdot)$ pour les fonctions permet de les distinguer des états possibles x du système). Nous étudierons les systèmes régis par une loi d'évolution du type $X'(t) = f(t, X(t))$ ou simplement $X'(t) = f(X(t))$, i.e. par une équation différentielle ordinaire (EDO). Notre but sera de comprendre l'évolution de l'état du système en fonction de son état initial.

On peut penser notamment à deux grands type d'applications : d'une part, la description de systèmes existants : la loi d'évolution est alors donnée et on cherche à prédire l'évolution du système (telle météorite va-t-elle heurter la Terre ?). D'autre part la construction de systèmes ayant certaines propriétés : on étudie la manière de choisir les variables qu'on contrôle permettant de parvenir au but recherché (comment fixer les quotas de pêche pour maximiser les ressources des pêcheurs de manière durable ?).

Les champs d'applications sont très divers : macroéconomie (modélisation de la croissance d'une économie), finance (évolution du cours d'une action), mécanique (mouvement des planètes), électronique (comportement des circuits électriques), chimie (cinétique d'une réaction chimique), démographie (évolution d'une population), écologie (évolution d'un écosystème), épidémiologie (propagation d'une maladie), médecine (évolution d'une tumeur),..., sans oublier des applications internes aux mathématiques.

Voici quelques exemples équations différentielles. L'équation $x'(t) = rx(t)$ décrit l'évolution du PIB d'un pays dont le taux de croissance instantané est constant et égal à r. Elle décrit également la croissance du nombre d'individus dans une population dont le taux de croissance est r. C'est le fameux modèle de Malthus qui prédit une croissance exponentielle. En pratique, l'épuisement des ressources limite la croissance de la population. Un modèle plus réaliste est l'équation logistique : $x'(t) = rx(t)(K - x(t))$, où K représente la capacité de portage du milieu (la taille maximale de la population que le milieu peut soutenir de manière stable). Supposons maintenant qu'il y ait deux populations : l'une de proies, l'autre de prédateurs, avec des densités de population respectives $x(t)$ et $y(t)$. Plus il y a de prédateurs, plus la population de proies diminue. Inversement, plus il y a de proies, plus la population de prédateurs augmente. Un modèle possible est le système d'équations différentielles suivant, appelé modèle de Lotka-Volterra :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & rx(t)\,[K - x(t) - ay(t)] \\ y'(t) & = & y(t)\,[bx(t) - c] \end{array} \right.$$

où a, b, c, r et K sont des constantes positives. Ce système peut se mettre sous la forme d'une unique équation $X'(t) = f(X(t))$ en posant $X(t) = (x(t), y(t))$.

Nous apprendrons dans ce cours à étudier ces équations différentielles et bien d'autres. Plus tard, certains d'entre vous étudieront d'autres types de lois d'évolution : équations aux dérivées partielles (EDP), équations différentielles stochastiques (EDS, très étudiées en finance), systèmes dynamiques discrets,...

1.2 Equations différentielles d'ordre 1

Conventions : sauf mention contraire, "intervalle" veut dire "intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide". Le plus souvent (sauf quand on passe de l'un à l'autre), $x(t) \in \mathbb{R}$ et $X(t) \in \mathbb{R}^d$. Au lieu de $x'(t)$, on utilisera également les notations dx/dt et $\dot{x}(t)$.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux équations différentielles du type :

$$X'(t) = f(t, X(t)) \tag{1}$$

avec $X(t) \in \mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Solutions. Une solution de (1) est la donnée d'un couple $(J, X(\cdot))$ où J est un intervalle et $X : J \to \mathbb{R}^d$ une fonction dérivable sur J telle que, pour tout $t \in J$, $(t, X(t)) \in \Omega$ et $X'(t) = f(t, X(t))$. Pour simplifier l'énoncé de certains théorèmes, nous supposerons en général que l'ouvert Ω est de la forme $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$ où I est un intervalle. La condition pour tout $t \in J$, $(t, X(t)) \in \Omega$ se réduit alors à $J \subset I$.

Par abus de langage, et quand il n'y a pas ambiguité sur J, nous dirons qu'une fonction $X : J \to \mathbb{R}$ est solution de (1) si $(J, X(\cdot))$ est solution de (1). Si f est de classe C^k alors toute solution de (1) est nécessairement de classe C^{k+1}.

Solutions maximales. Si $X : J \to \mathbb{R}$ est une solution de (2) alors n'importe quelle restriction de $X(\cdot)$ à un intervalle $\hat{J} \subset J$ est encore solution. Pour espérer un résultat d'unicité, il faut donc se restreindre aux solutions qui ne peuvent pas être prolongées. On les appelles des solutions *maximales* :

Définition 1 *Une solution $X : J \to \mathbb{R}^d$ de (1) est maximale s'il n'existe pas d'intervalle $\tilde{J}$ contenant strictement J et de solution $\tilde{X} : \tilde{J} \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{X}_{|J}(\cdot) = X(\cdot)$.*

Exemple : soient λ un réel et $x_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x_\lambda(t) = \lambda e^{at}$. C'est une solution maximale de $x'(t) = ax(t)$. La restriction de x_λ à l'ensemble de départ $]0, 1[$ est aussi solution, mais ce n'est pas une solution maximale.

Equations autonomes. L'équation (1) est dite autonome si f ne dépend pas de t, et non autonome sinon. Une équation différentielle autonome est donc du type $X'(t) = f(X(t))$.

Exemples (avec $d = 1$) : $x'(t) = x(t)$ (autonome) ; $x'(t) = x(t) + t$ (non autonome). [1]

Une équation non-autonome dans $\mathbb{R}^d$ peut être résolue via une équation autonome auxiliaire dans $\mathbb{R}^{d+1}$. En effet, associons à l'équation non autonome (1), avec $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, l'équation autonome

$$Y' = g(Y) \tag{2}$$

avec $g : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ telle que $g(Y) = (1, f(Y))$. On vérifie que $X : J \to \mathbb{R}^d$ est solution de (1) si et seulement si la fonction $Y : J \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ définie par $Y(t) = (t, X(t))$ est solution de (2). On peut donc déduire les solutions de (1) des solutions de (2).

Résoudre une équation non autonome via l'équation autonome associée est rarement une bonne idée en pratique (car la dimension augmente, ce qui complique la résolution). En revanche, le fait qu'on puisse le faire en théorie implique qu'il suffit de démontrer certains résultats pour les équations autonomes.

Problème de Cauchy : un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale. C'est donc un problème du type :

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{3}$$

avec $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{R}^d$ et $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

Une solution (resp. solution maximale) de ce problème est une solution (resp. solution maximale) $(J, X(\cdot))$ de (1) telle que $t_0 \in J$ et $X(t_0) = X_0$.

Un problème de Cauchy peut ne pas avoir de solutions (si f n'est pas continue, voir TD) et peut avoir plusieurs solutions maximales (même si f est continue).

[1] La terminologie autonome/non-autonome vient de la physique : les lois fondamentales de la physique ne dépendent pas du temps. De ce fait, l'évolution d'un système physique isolé peut normalement être décrit par une équation autonome. L'évolution d'un système physique ne sera décrit par une équation non-autonome que quand il est soumis à des forces extérieures au système, qu'il n'évolue donc pas de manière autonome, au sens courant du terme.

Exemple : considérons le problème de Cauchy $x'(t) = 3|x(t)|^{2/3}$ et $x(0) = 0$ (ici, $x(t) \in \mathbb{R}$). Les fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ définies sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = t^3$ et $y(t) = 0$ sont toutes deux solutions. Ce problème n'a donc pas une solution unique. Il en a même une infinité (voir TD).

On peut montrer que si f est continue, le problème (3) a toujours une solution, mais ceci est hors-programme. Ce qui est essentiel est que si f est C^1 alors le problème (3) a une unique solution maximale.

Théorème 2 *(Théorème de Cauchy-Lipschitz - version simple - provisoirement admise)* *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On considère le problème de Cauchy*

$$(\mathcal{C}_{X_0,t_0}) \quad \begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{4}$$

Si f est de classe C^1 alors :

1) $(\mathcal{C}_{X_0,t_0})$ a une unique solution maximale $(J_{max}, X_{max}(\cdot))$ et J_{max} est un ouvert de I.

2) Les solutions de $(\mathcal{C}_{X_0,t_0})$ sont exactement les restrictions de l'unique solution maximale, i.e. les couples $(J, X_{\max|J}(\cdot))$ avec J sous-intervalle de J_{max}

Remarque : le théorème est toujours valable si f n'est pas C^1 mais simplement continue en temps (en t) et C^1 en espace (en x).[2]

Dans la suite, on ne s'intéressera qu'à des équations différentielles pour lesquelles le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. En particulier, à cause du point 2), on pourra toujours déduire l'ensemble des solutions de l'ensemble des solutions maximales. De ce fait, on ne s'intéressera plus qu'aux solutions maximales. *Sauf indication contraire, dans toute la suite du cours, solution veut dire solution maximale.*

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'un grand nombre de problèmes de Cauchy sont des problèmes bien posés, au sens où ils admettent une unique solution maximale. Il a comme corollaire fondamental que deux solutions ne peuvent pas se croiser.

Corollaire 3 *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1. Soient $X : J \to R$ et $Y : J' \to \mathbb{R}$ des solutions maximales de $X'(t) = f(t, X(t))$. S'il existe $t \in J \cap J'$ tel que $X(t) = Y(t)$, alors $J = J'$ et $X(\cdot) = Y(\cdot)$.*

Preuve. Soient t_0 le réel t tel que $X(t) = Y(t)$ et $u_0 = X(t_0) = Y(t_0)$. Les couples $(J, X(\cdot))$ et $(J', Y(\cdot))$ sont deux solutions maximales de $u'(t) = f(t, u(t))$ et $u(t_0) = u_0$. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a donc $(J, X(\cdot)) = (J', Y(\cdot))$. ■

Les conséquences sont particulièrement importantes quand $d = 1$:

Corollaire 4 *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soient $x : J \to R$ et $y : J' \to \mathbb{R}$ des solutions maximales de $x'(t) = f(t, x(t))$. S'il existe $t \in J \cap J'$ tel que $x(t) < y(t)$, alors pour tout $t \in J \cap J'$, $x(t) < y(t)$.*

[2] f est C^1 en x si pour tout $i \in \{1, ..., d\}$ la dérivée partielle de f par rapport à x_i est définie et continue sur $I \times R^d$.

Preuve. D'après l'hypothèse, il existe $t_0 \in J \cap J'$ tel que $x(t_0) < y(t_0)$. Si la conclusion est fausse, il existe t_1 dans $J \cap J'$ tel que $x(t_1) > y(t_1)$. Comme $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont dérivables donc continues et que $J \cap J'$ est un intervalle, le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) implique qu'il existe $t \in J \cap J'$ tel que $x(t) = y(t)$. D'après le corollaire 3, les fonctions $x(\cdot)$ et $x(\cdot)$ sont donc égales. C'est impossible car $x(t_0) < y(t_0)$. ■

Exercice. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soient $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $z : J \to \mathbb{R}$ des solutions de $x'(t) = f(t, x(t))$. On suppose qu'il existe $\tau \in J$ telle que $x(\tau) < z(\tau) < y(\tau)$. Montrer que pour tout $t \in J$, $x(t) < z(t) < y(t)$. En déduire que si $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont bornées, alors $z(\cdot)$ est bornée.

Solutions globales et alternative d'explosion. On dit qu'une solution de (1) est globale si elle est définie sur tout I, i.e. sur tout l'intervalle de temps sur lequel est définie l'équation différentielle. Une solution maximale n'est pas forcément globale.

Exemple. Soit l'équation $x'(t) = x^2(t)$ (c'est une équation autonome, donc $I = \mathbb{R}$). La fonction $x :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $x(t) = -1/t$ est une solution maximale de cette équation, mais ce n'est pas une solution globale car elle n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$.

La raison pour laquelle cette solution ne peut pas être prolongée en 0 est que $|x(t)| \to +\infty$ quand $t \to 0^+$. Le théorème suivant montre que c'est la seule raison pour laquelle une solution maximale peut cesser d'être définie avant d'atteindre le bord de l'intervalle I, i.e. de l'intervalle de temps sur lequel l'équation est définie.

Théorème 5 *(Alternative d'explosion - version simple)*

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1. Soient α et β dans $\bar{\mathbb{R}}$ et $X :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^d$ une solution maximale de $X'(t) = f(t, X(t))$.

1) Si $\beta < \sup I$ alors $||X(t)|| \to +\infty$ quand $t \to \beta$.

2) Si $\alpha > \inf I$ alors $||X(t)|| \to +\infty$ quand $t \to \alpha$.

($\inf I$ et $\sup I$ sont dans $\bar{\mathbb{R}}$).

Remarque :

i) si $x(\cdot)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors par continuité de $x(\cdot)$, on a $|x(t)| \to +\infty$ quand $t \to \beta$ si et seulement si $x(t) \to +\infty$ ou $x(t) \to -\infty$.

ii) si $X(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ alors on peut avoir $||X(t)|| \to +\infty$ quand $t \to \beta$ sans que ni $|x_1(t)|$, ni $|x_2(t)|$ ne tende vers l'infini (donnez un exemple!).

Voici une autre manière de formuler l'alternative d'explosion : considérons une solution pas forcément maximale de $X'(t) = f(t, X(t))$. Supposons qu'en temps positif, cette solution cesse d'être définie avant d'atteindre la borne sup de l'intervalle de temps où est définie l'équation. Si de plus la norme de la solution ne tend pas vers l'infini quand elle cesse d'être définie, alors cette solution peut être prolongée. Même chose pour les temps négatifs.

Terminologie. On dit que la solution $X(\cdot)$ d'une équation différentielle explose au temps τ si sa norme tend vers l'infini quand $t \to \tau$. Le théorème précédent dit que $X(\cdot)$ est définie jusqu'au bout de l'intervalle I ou explose au temps où elle cesse d'être définie, d'où l'expression alternative d'explosion.

Avant de prouver le théorème précédent, notons qu'il implique que si on peut borner la norme de la solution par une fonction continue définie sur I tout entier, alors la solution est globale. Nous apprendrons plus tard à trouver de telles fonctions-bornes.

Corollaire 6 *(Critère de non-explosion) Mêmes hypothèses que pour l'alternative d'explosion. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $t_0 \in]\alpha, \beta[$.*

1) Si pour tout $t \in [t_0, \beta[$, $||X(t)|| \leq g(t)$ alors $\beta = \sup I$.

2) Si pour tout $t \in]\alpha, t_0[$, $||X(t)|| \leq g(t)$ alors $\alpha = \inf I$.

En particulier, si pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, $||X(t)|| \leq g(t)$ alors $X(\cdot)$ est une solution globale.

La preuve est facile, et laissée au lecteur.

1.3 Preuve de l'alternative d'explosion

Dans cette preuve, “solution" veut dire “solution pas forcément maximale".

L'idée de la preuve est la suivante. Supposons $\beta < \sup I$. Si ||X(t)|| ne tend pas vers l'infini, alors $X(t)$ a au moins une valeur d'adhérence $X^* \in \mathbb{R}^d$. Comme $\beta < \sup I$, on peut trouver un voisinage compact (β, X^*) inclus dans le domaine de définition de f. Or f est continue, donc f est bornée sur ce voisinage. Comme $X'(t) = f(t, X(t))$, ceci implique que $X(\cdot)$ ne peut pas osciller et converge vers X^*. On peut alors prolonger $X(\cdot)$ en une solution définie au-delà de β à l'aide d'une solution de l'équation différentielle valant X^* en $t = \beta$. C'est donc que $X(\cdot)$ n'est pas une solution maximale.

Voici la preuve complète : supposons $\beta < \sup I$. Si $||X(t)||$ ne tend pas vers l'infini en β, alors il existe un réel M et une suite croissante $(t_n) \to \beta$ tels que $||X(t_n)|| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la boule fermée de rayon M est compacte, quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe $X^* \in \mathbb{R}^d$ tel que $X(t_n) \to X^*$ quand $n \to +\infty$. Nous prouverons à la fin que :

Lemme : $X(t) \to X^*$ quand $t \to \beta$.

Soit $Y(\cdot)$ une solution de $X'(t) = f(t, X(t))$ telle que $Y(\beta) = X^*$ et définie sur $]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$ (une telle solution existe d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz). Soit $Z :]\alpha, \beta + \epsilon[\to \mathbb{R}^d$ définie par $Z(t) = X(t)$ si $t \in]\alpha, \beta[$ et $Z(t) = Y(t)$ si $t \in [\beta, \beta + \varepsilon[$. La fonction $Z(\cdot)$ est continue, dérivable de dérivée $Z'(t) = f(t, Z(t))$ sur $]\alpha, \beta[$ et sur $]\beta, \beta + \varepsilon[$. De plus, $Z'(t) = f(t, Z(t)) \to f(\beta, Z(\beta))$ quand $t \to \beta$ (avec $t \neq \beta$). Ceci implique (résultat classique) que $Z(\cdot)$ est également dérivable en β, de dérivée $Z'(\beta) = f(\beta, Z(\beta))$ et donc finalement que $Z(\cdot)$ est solution de (1). Comme $Z(\cdot)$ est un prolongement strict de $X(\cdot)$, c'est donc que $X(\cdot)$ n'est pas une solution maximale.

Il reste à prouver le lemme. Il suffit de montrer que $X(\cdot)$ est Lipschitzienne au voisinage de β. En effet (exercice facile), si une fonction $]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^d$ est Lipschitzienne au voisinage de β et a une valeur d'adhérence X^* en β, alors elle converge vers X^* en β.

Soit $c \in]\alpha, \beta[$ et $\bar{B}(X^*, 1) \subset \mathbb{R}^d$ la boule fermée de centre X^* et de rayon 1. L'ensemble $C = [c, \beta] \times \bar{B}(X^*, 1)$ est compact et inclus dans le domaine de définition de f (on utilise ici que $\beta < \sup I$). Par continuité de f, il existe un réel K tel que pour tout $(t, X) \in C$, $||f(t, X)|| \leq K$.

Rappelons que $t_n \to \beta$ et $X(t_n) \to X^*$. Pour N suffisamment grand, on a donc $t_N \geq c$, $K(\beta - t_N) < 1/2$ et $||X(t_N) - X^*|| < 1/2$. Soit $t \in]t_N, \beta[$. Supposons que pour tout $s \in [t_N, t[$ on a $||X(s) - X(t_N)|| < 1/2$, et donc $||X(s) - X^*|| < 1$. Alors

$$||X(t) - X(t_N)|| \leq \int_{t_N}^{t} ||X'(s)||ds = \int_{t_N}^{t} ||f(s, X(s)||ds \leq K(t - t_N) \leq K(\beta - t_N) < 1/2.$$

Ceci implique (voir exercice ci-dessous) que pour tout $t \in [t_N, \beta[$, $||X(t) - X(t_N)|| < 1/2$ donc $||X(t) - X^*|| < 1$ et donc $||X'(t)|| = ||f(t, X(t))|| \leq K$. Donc $X(\cdot)$ est K Lipschitzienne au voisinage de β, ce qui conclut la preuve.

Exercice (utilisé dans la preuve) : soient a, b, c des réels. Soit $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $g(a) < c$ et que pour tout $t \in]a, b[$, si $g(s) < c$ pour tout $s \in [a, t[$ alors $g(t) < c$. Montrer que $g(t) < c$ pour tout $t \in [a, b[$.

1.4 Equations d'ordre n

Un exemple. Commençons par un exemple. L'équation

$$z''(t) = -g \tag{5}$$

où $z(t) \in \mathbb{R}$, est une équation différentielle d'ordre 2, i.e. faisant intervenir jusqu'à la dérivée seconde. Elle modélise la chute (plus précisément, l'évolution de l'altitude) d'un corps de masse unité soumis à l'attraction terrestre. Les solutions maximales se trouvent en intégrant deux fois. Ce sont les fonctions $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $z(t) = -\frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + v_0(t-t_0) + z_0$, où v_0 et z_0 s'interprètent comme la vitesse (ascendante) et l'altitude à l'instant t_0. Remarquons qu'il y a une infinité de solutions telles que $z(t_0) = z_0$. Ceci ne contredit pas le théorème de Cauchy-Lipschitz car l'équation n'est pas d'ordre 1. Pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, il faut se ramener à une équation d'ordre 1. Pour ce faire, on pose $Z(t) = (z(t), z'(t))$ et $F(z_1, z_2) = (z_2, -g)$ si bien que $F(Z(t)) = (z'(t), -g)$. On a donc

$$z''(t) = -g \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z'(t) = z'(t) \\ z''(t) = -g \end{array} \right. \Leftrightarrow Z'(t) = F(Z(t)).$$

Donc $z(\cdot)$ est solution de (5) si et seulement si $Z(\cdot)$ est solution de

$$Z'(t) = F(Z(t)) \tag{6}$$

Cette équation est d'ordre 1 et F est de classe C^∞ donc C^1. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. On obtient que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $Z_0 = (z_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale de (6) telle que $Z(t_0) = (z_0, v_0)$. En revenant à l'équation initiale on obtient donc qu'il existe une unique solution maximale $z(\cdot)$ de (5) telle que $z(t_0) = z_0$ ET $z'(t_0) = v_0$.

Le point fondamental est que la condition initiale ne porte pas que sur la position initiale $z(t_0)$ mais aussi sur la vitesse initiale $z'(t_0)$. Ceci montre que même si on ne s'intéresse au final qu'à l'évolution de la position du corps, il faut décrire son état comme un couple (position, vitesse), et donc étudier l'évolution de ce couple dans l'espace $\mathbb{R}^2$, appelé espace des phases associé à cette équation.

Cas général. D'une manière générale, une équation d'ordre n sous forme normale s'écrit

$$x^{(n)}(t) = f(t, x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \tag{7}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \times \mathbb{R}^{nd} \to \mathbb{R}^d$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nd}$. Si $\Omega = I \times \mathbb{R}^{nd}$ où I est un intervalle, une solution de (7) est un couple $(J, x(\cdot))$ où J est un intervalle inclus dans I et $x : J \to \mathbb{R}^d$ une fonction dérivable vérifiant (7) pour tout t dans J. Les notions de solutions maximales et globales sont les mêmes que pour les équations d'ordre 1. Pour simplifier les notations, nous supposerons dans la suite que $d = 1$, i.e. $x(t) \in \mathbb{R}$, mais le cas général est tout à fait analogue.

En supposant donc $d = 1$, l'équation (7) se ramène à une équation d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^n$ en posant $X(t) = (x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{R}^n$ et $F(t, x_1, ..., x_n) = (x_2, ..., x_n, f(t, x_1, ..., x_n))$. La fonction $x(\cdot)$ est solution de (7) si et seulement si $X(\cdot)$ est solution de

$$X'(t) = F(t, X(t)). \tag{8}$$

Remarquons que F a la même régularité que f. En appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz à (8) puis en revenant à l'équation initiale, on obtient que si f est C^1, alors pour tout réel t_0 et toute condition initiale $(x_0, x'_0, ..., x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale telle que $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$, et pour tout $k \in \{2, ..., n-1\}$, $x^{(k)}(t_0) = x_0^{(k)}$. L'espace des phases est ici $\mathbb{R}^n$.

Pour l'alternative d'explosion, on obtient que si f est de classe C^1 et que $z : J \to \mathbb{R}$ est une solution maximale de (7) alors

- si $\sup J < \sup I$, alors $||(z(t), z'(t), ..., z^{(n-1)}(t))|| \to +\infty$ quand $t \to \sup J$.

- si $\inf J > \inf I$, alors $||(z(t), z'(t), ..., z^{(n-1)}(t))|| \to +\infty$ quand $t \to \inf J$.

2 Méthodes de résolution explicite

Toute cette section est en dimension 1 (au sens où $x(t) \in \mathbb{R}$).

2.1 Equations à variables séparables.

2.1.1

On considère un problème de Cauchy du type $x'(t) = g(x(t))h(t)$ et $x(t_0) = x_0$, avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$, où I intervalle, et bien sûr $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose g et h continue.

Remarque : ce cas est plus gé né ral que ce qu'on a vu en cours, où l'on a supposé g de classe C^1. Si g n'est pas de classe C^1, on ne peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. En revanche, si g est C^1 (ou simplement localement lipschitzienne) et h continue, alors la fonction $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t,x) = g(x)h(t)$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à x, donc Cauchy-Lipschitz s'applique.[3]

Proposition 7 *Cas 1 : Si $g(x_0) = 0$. Une solution maximale est alors la solution stationnaire $(I, t \to x(t) = x_0)$. Si g est C^1, c'est la seule.*

Cas 2. Si $g(x_0) \neq 0$. Soit $(J, x(\cdot))$ une solution et $\tilde{J}$ le plus grand sous-intervalle de J contenant x_0 et sur lequel $g(x(t)) \neq 0$. Soit φ une primitive de $1/g$ (définie sur le plus grand intervalle contenant x_0 et sur lequel g ne s'annule pas) et H une primitive de h.

a) Il existe une constante C telle que, pour tout $t \in \tilde{J}$,

$$x(t) = \varphi^{-1}(H(t) + C) \tag{9}$$

et $C = 0$ si φ et G sont les primitives qui s'annulent respectivement en x_0 et t_0.

b) si g est C^1, alors $\tilde{J} = J$; i.e. la formule (9) est valable sur tout l'intervalle de définition.

En pratique, on ne retient pas la formule (9) mais on retient (et vous avez le droit d'utiliser) que le calcul formel suivant est correct tant que $g(x(t))$ ne s'annule pas.

$$\frac{dx}{dt} = g(x)h(t) \Leftrightarrow \frac{1}{g(x)}dx = h(t)dt \Leftrightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{g(y)}dy = \int_{t_0}^{t} h(s)ds$$

d'où l'on déduit la valeur de $x(t)$ car g ne s'annule pas entre $x(t_0)$ et $x(t)$ et la primitive de $1/g$ est donc inversible.

Attention : quand g n'est que C^0, il se peut que $g(x(0))$ soit non nul mais que $g(x(t))$ s'annule pour un certain t. Il faut alors regarder plus en détail.

2.1.2 Application.

1) Une EDO autonome $x'(t) = f(x(t))$ avec $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est un cas particulier d'équation à variables séparables (écrire $f(x) = g(x)h(t)$ avec $h(t) = 1$ pour tout t.) La méthode de séparation des variables permet donc de ramener le calcul des solutions de ce type d'EDO à un problème de calcul de primitives (mais qu'en général on ne sait pas résoudre !).

2) Soit le problème de Cauchy $x'(t) = K|x|^\alpha$ et $x(t_0) = x_0 > 0$, avec $K > 0$, $\alpha > 0$. La méthode de séparation des variables permet de calculer explicitement les solutions. On

[3]En revanche, dans le cas général, f C^∞ par rapport à chacune des variables n'implique pas f localement lipschitzienne par rapport à x. Contre-exemple classique : $f(t,x) = tx/(t^2 + x^2)$ si $(t,x) \neq (0,0)$; $f(t,x) = 0$ sinon. Pour toute constante K, on a pour ε suffisamment petit $|f(\varepsilon,\varepsilon) - f(\varepsilon,0)| = 1/2 > K\varepsilon$, donc la fonction n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $(0,0)$.

montre que si $0 < \alpha \leq 1$ alors les solutions maximales sont globales alors que si $\alpha > 1$, les solutions maximales explosent (du côté des t croissants) : elles sont définies sur un intervalle du type $]\infty, T[$ avec $T < +\infty$ et tendent vers $+\infty$ quand $t \to T^-$.

2.2 Equations linéaires, variation de la constante.

Soit I un intervalle, et $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.

EDO linéaire homogène (aussi appelée sans second membre).

Soit l'EDO :

$$x'(t) = a(t)x(t). \tag{10}$$

Les solutions maximales de (10) sont les fonctions définies sur I et de la forme $x(t) = \lambda e^{A(t)}$ où λ est une constante et $A : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $a(\cdot)$.

Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, le problème de Cauchy $x'(t) = a(t)x(t)$ et $x'(t_0) = x_0$ a une unique solution maximale. C'est la fonction définie sur I par $x(t) = x_0 \exp(\int_{t_0}^t a(s)ds)$.

EDO linéaire non homogène (aussi appelé avec second membre).

Soit L'EDO :

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t). \tag{11}$$

1) Les solutions maximales sont globales.

2) La solution générale de l'équation linéaire avec second membre (11) est la somme d'une solution particulière de (11) et de la solution générale de l'équation homogène associée (10).

Formellement, si $x_p : I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de (11), alors les solutions maximales de (11) sont les fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ telles que

$$x(t) = x_p(t) + \lambda e^{A(t)}, \forall t \in I.$$

3) Les solutions maximales sont les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout t dans I

$$x(t) = \left(\lambda + \int_{t_0}^t b(s)e^{-A(s)}ds\right) e^{A(t)} \qquad \text{(formule de Duhamel)}$$

où λ est un réel et A une primitive de a. Pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le problème de Cauchy $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ et $x'(t_0) = x_0$ a une unique solution maximale. On l'obtient en prenant $\lambda = x_0$ et $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$ dans la formule de Duhamel.

Remarque : la formule de Duhamel n'est pas forcément à connaître par coeur. En revanche, il faut savoir la retrouver à partir de la *méthode de la variation de la constante*. Cette méthode consiste à recherche la solution de (10) sous la forme $x(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ où A est une primitive de a. Ceci est légitime car $e^{A(t)}$ ne s'annulant pas, toute fonction peut se mettre sous cette forme (il suffit de poser $\lambda(t) = x(t)e^{-A(t)}$). On trouve alors que la fonction $x(\cdot)$ est solution sur un intervalle J si et seulement si la fonction $\lambda(\cdot)$ est dérivable et vérifie

$$\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)} \quad \forall t \in J$$

En intégrant, on en déduit la formule de Duhamel.

Mise en garde : tout ceci n'est valable que pour les équations linéaires. L'ajout d'une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée ne marche pas pour résoudre, par exemple, $x'(t) = a(t)x^2 + b(t)$. La méthode de la variation de la constante non plus. En revanche, d'autres changements de variable sont souvent utiles.

Remarque sur la résolution d'un problème de Cauchy

Pour résoudre un problème de Cauchy, il est parfois utile utile de procéder en deux temps :

a) On trouve la solution générale de l'équation différentielle sous-jacente (sans tenir compte de la condition initiale). Cette solution dépend de constantes.

b) On détermine la valeur des constantes pour que la condition initiale soit satisfaite.