**Feuille de TD1 : rappels et compléments d'analyse, applications du théorème de Cauchy-Lipschitz et de l'alternative d'explosion.**

**Exercice 1** *(à faire à la maison, pas en TD)* Soient $a$, $b$, $c$ des réels tels que $a < c < b$. Soit $g : ]a,b[ \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue, de classe $C^1$ sur $]a,c[$ et $]c,b[$ et telle que $g'(t)$ a une limite quand $t \to c$ (avec $t \neq c$). Montrer que $g$ est de classe $C^1$ sur $]a,b[$ (on pourra remarquer qu'il suffit de traiter le cas $d = 1$, cas probablement étudié en L1).

**Exercice 2** *(un raisonnement standard)* Soit $g : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $g(0) < 1$ et que, pour tout $t \in [0,+\infty[$ : si $g(s) \leq 1$ pour tout $s \in [0,t[$, alors $g(t) < 1$. Montrer que $g(t) < 1$ pour tout $t \in [0,+\infty[$.

**Exercice 3** *(utile pour la preuve de l'alternative d'explosion )* Soient $a$ et $b$ des réels, avec $a < b$. Montrer que si une fonction de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}^d$ est Lipschitzienne et a une valeur d'adhérence $x^*$ en $b$, alors elle converge vers $x^*$ en $b$.

**Exercice 4** *(les problèmes d'intégrations sont des cas particuliers simples d'équations différentielles)* Résoudre l'équation différentielle $x'(t) = \sin t$.

**Exercice 5** *(fonctions localement Lipschitzienne)* Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$. On rappelle que la fonction $f$ est Lipschitzienne s'il existe un réel $K$ tel que, pour tous $x$ et $y$ dans $\Omega$, $||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y||$, le réel $K$ étant un rapport de Lipschitz de $f$.

La fonction $f$ est *localement Lipschitzienne* si elle est Lipschitzienne sur tout compact (i.e. pour tout compact $C \subset \Omega$, $f_{|C}$ est Lipschitzienne, le rapport de Lipschitz pouvant dépendre de $C$).[1] Le but de cet exercice est de comprendre cette notion (intéressante, car on peut montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz est toujours valable pour les équations du type $x'(t) = f(x(t))$ où $f$ n'est pas $C^1$ mais est localement Lipschitzienne).

a) Pourquoi la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ n'est-elle pas Lipschitzienne ?

b) Montrer que toute fonction $C^1$ est localement Lipschitzienne, et donc en particulier la fonction du a).

c) Donner un exemple de fonction qui n'est pas $C^1$ mais qui est Lipschitzienne (donc localement Lipschitzienne).

d) Soit $\alpha \in ]0,1[$. Montrer que la fonction de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = |t|^\alpha$ n'est pas localement Lipschitzienne.

**Exercice 6** *(un exemple de problème de Cauchy n'ayant pas de solutions)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x < 0$ et $f(x) = -1$ si $x \geq 0$. Montrer qu'il n'y a aucune solution de $x'(t) = f(x(t))$ définie au voisinage de 0 et telle que $x(0) = 0$.

[1] Exercice pour les motivés : montrer que $f$ est localement Lipschitzienne si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage de $x$ sur lequel $f$ est Lipschitzienne.

**Exercice 7** *(un exemple de problème de Cauchy n'ayant pas une solution unique, une correction sera distribuée ou mise en ligne)*

On considère le problème de Cauchy $x'(t) = 3|x(t)|^{\frac{2}{3}}$ avec $x(0) = 0$.

a) Montrer que la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et la fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x(t) = t^3$ sont deux solutions maximales de ce problème. Cela contredit-il le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

b) Soient $a$ et $b$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ avec $a \leq 0 \leq b$. Soit $u_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_{a,b}(t) = (t-a)^3$ si $t \leq a$, $u_{a,b}(t) = 0$ si $t \in ]a, b[$, et $u_{a,b}(t) = (t-b)^3$ si $t > b$. Montrer que $u_{a,b}$ est une solution maximale.

c) Montrer que toutes les solutions maximales sont de ce type.

**Exercice 8** *(Application du théorème de Cauchy-Lipschitz)* Soit (E) l'équation différentielle autonome $x'(t) = f(x(t))$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Soit $(J, x(\cdot))$ une solution maximale de (E). On dit que c'est une solution stationnaire si la fonction $x(\cdot)$ est constante.

1) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 = x(t_0)$. Montrer que si $f(x_0) = 0$ alors $x(\cdot)$ est stationnaire et $J = \mathbb{R}$. Montrer que si $f(x_0) \neq 0$ alors $x(\cdot)$ n'est pas stationnaire.

2) Montrer que s'il existe $t \in J$ telle que $x'(t) = 0$ alors $x(\cdot)$ est stationnaire et $J = \mathbb{R}$.

3) En déduire que toutes les solutions de (E) sont monotones, et strictement monotones si elles ne sont pas stationnaires.

4) En déduire que les seules solutions périodiques de (E) sont les solutions stationnaires (une solution $(J, x(\cdot))$ est périodique si elle est globale et s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ telle que $x(t+T) = x(t)$ pour tout réel $t$). Qu'en est-il selon vous pour une équation différentielle non autonome ? Pour une équation différentielle autonome mais avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ?

**Exercice 9** *(Application du théorème de Cauchy-Lipschitz et de l'alternative d'explosion)*

On considère une équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Soient $(J_1, x(\cdot))$ et $(J_2, y(\cdot))$ deux solutions maximales. Pour $i = 1, 2$, on pose $J_i = ]a_i, b_i[$, où $a_i$ et $b_i$ sont dans $\bar{\mathbb{R}}$. On suppose qu'il existe $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $x(t_0) < y(t_0)$.

a) Montrer que pour tout $t \in J_1 \cap J_2$, $x(t) < y(t)$.

b) En déduire que:

b1) si $x(t) \to +\infty$ quand $t \to b_1$ alors $b_2 \leq b_1$ et $y(t) \to +\infty$ quand $t \to b_2$.

b2) si $y(t) \to -\infty$ quand $t \to a_2$ alors $a_2 \leq a_1$ et $x(t) \to -\infty$ quand $t \to a_1$.

c) Sans supposer ni $x(t) \to +\infty$ quand $t \to b_1$ ni $x(\cdot)$ croissante, est-il vrai que si $b_1 < +\infty$ alors $b_2 < +\infty$ ? Qu'en est-il si $x$ est croissante ?

d) On suppose désormais que les solutions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont globales (i.e. $J_1 = J_2 = \mathbb{R}$). Soit $(J, z(\cdot))$ une solution maximale. Montrer que s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z(t) \in ]x(t), y(t)[$ alors $z$ est globale et $z(t) \in ]x(t), y(t)[$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.