TD3 : champs de vecteurs, méthode d'Euler, principes de comparaisons, explosion.

Exercice 1 *On remarquera que l'équation $x' = x(1-x) - p$ peut être résolue explicitement, comme on l'a vu dans la feuille 2, mais que le portrait de phase permet de comprendre bien plus rapidement et facilement le comportement général des solutions.*

On désire étudier l'évolution au cours du temps de la population $s(t)$ de poissons dans un étang.

1. En l'absence de pêche, $s(t)$ satisfait à:
$$s'(t) = s(t)\,(1 - s(t))\,. \tag{1}$$
Que se passe-t-il si $s(0) = 0$ ou 1 ? Montrer que, si $s(0) \in]0,1[$, l'équation (1) admet une unique solution, définie sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et telle que:
$$\lim_{t\to-\infty} s(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} s(t) = 1.$$

2. On introduit maintenant un effort de pêche p modélisant le prélèvement d'une quantité de poissons fixe par unité de temps, ce qui conduit à la loi d'évolution suivante:
$$s'(t) = s(t)\,(1 - s(t)) - p, \quad (p > 0).$$
Le modèle a-t-il du sens pour des conditions initiales $s(0) < 0$? Pour des conditions initiales $s(0) > 0$, que se passe-t-il si l'effort de pêche est trop important?

3. On considère maintenant un modèle où la quantité pêchée est proportionnelle à la densité de population, ce qui conduit à la loi d'évolution suivante:
$$s'(t) = s(t)\,(1 - s(t)) - ps(t), \quad (p > 0).$$
Comparer le comportement qualitatif des solutions à celui du modèle précédent.

Exercice 2 Sans justifier, donner l'allure du champ des vitesses, du graphe des solutions et du portrait de phase pour l'équation différentielle $x' = x(K - x)$, $K > 0$.

Exercice 3 *(but : vérifier que les étudiants ont compris l'idée de la méthode d'Euler)*

On note (E) l'équation différentielle $x'(t) = x(t) + t$.

a) Montrer qu'il existe une solution dont la trajectoire est une droite puis résoudre (E).

b) Dessiner le champ de vecteurs aux points de coordonnées entières (n, m) tels que $0 \leq n \leq 2$ et $-1 \leq m \leq 1$.

c) On s'intéresse au problème de Cauchy $x'(t) = x(t) + t$ et $x(0) = 0$. On note $y_\lambda(\cdot)$ la solution approchée obtenue en appliquant la méthode d'Euler avec un pas de λ. Calculer $y_\lambda(t)$ pour $t \in [0, 2]$ dans les cas suivants : $\lambda = 2$; $\lambda = 1$; $\lambda = 1/2$. Que constatez-vous sur l'écart entre la vraie solution et la solution approchée quand λ diminue ?

d) Montrer que pour le problème de Cauchy $x'(t) = x(t) + t$ et $x(0) = -1$, la méthode d'Euler donne la solution exacte (pour n'importe quel pas). Pourquoi est-ce le cas ?

Exercice 4 Faire l'exercice 4 de la page où sont représentés des champs de vecteurs (la figure 1.29 n'est là que pour aider les étudiants à faire l'exercice 5 de cette page).

Exercice 5 Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, où $I =]a, b[$, une fonction continue. On considère l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{2}$$

Montrer que toute solution maximale de (2) est globale, c'est-à-dire définie sur I :

1. si f est bornée sur $I \times \mathbb{R}^n$;

2. s'il existe deux constantes positives A et B telles que

$$\forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n, \quad ||f(t, x)|| \leq A||x|| + B.$$

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to R$ une fonction de classe C^1. Soit $(J, x(\cdot))$ une solution maximale de $x'(t) = f(t, x(t))$ telle que $x(t) \to +\infty$ quand $t \to \sup J$. Redémontrer les résultats suivants (vu en cours, mais en ne faisant les preuves qu'à l'oral).

i) s'il existe des réels K et $\bar{x}$ tels que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$: $x \geq \bar{x} \Rightarrow f(t, x) \leq Kx$, alors $\sup J = +\infty$.

ii) s'il existe des réels *strictement positifs* K, $\bar{x}$ et ε tels que, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $x \geq \bar{x} \Rightarrow f(t, x) \geq Kx^{1+\varepsilon}$, alors $\sup J < +\infty$.

Exercice 7 Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \sin\left(x(t) + y(t)\right), & x(0) = x_0 \\ y'(t) = e^{x(t)-1}, & y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Montrer que le problème (3) admet une unique solution maximale $(I, (x, y))$.

2. Montrer que, pour tout $t \in I$, $|x(t) - x_0| \leq |t|$. En déduire que $I = \mathbb{R}$.

Exercice 8 Dans les cas suivants, dire si la solution du problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x)$, $x(0) = x_0$ explose ou non du côté des temps positifs.

1) $f(t, x) = t + x$, x_0 quelconque ; 2) $f(t, x) = tx$, $x_0 = 5$; 3) $f(t, x) = x^2$, $x_0 > 0$;
4) $f(t, x) = x^2$, $x_0 = 0$; 5) $f(t, x) = x^2 + t$, $x_0 = 0$; 6) $f(t, x) = x^2 - t$, $x_0 < 0$;
7) $f(t, x) = x^2 - t$, $x_0 > 0$ tel que $x_0^2 - t > 1/(2x_0)$; 8) $f(t, x) = x^{4/3}/\sqrt{1 + x^2}$, $x_0 > 0$;
9) $f(t, x) = x^3/\sqrt{1 + x^2}$, $x_0 > 0$; 10) $f(t, x) = x^{4/3}/\sqrt{1 + \sin^2(x)}$, $x_0 > 0$;
11) $f(t, x) = x^{4/3}/\sqrt{1 + \sin^2(x)}$, $x_0 \leq 0$; 12) $f(t, x) = \ln x$, $x_0 = 2$.