Feuille de TD 4: Systèmes linéaires

Exercice 1 1) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $X(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ une solution de $X' = AX$, et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $X(t) = 0$ si et seulement si $X(0) = 0$. En déduire que e^{tA} est inversible.

2) Retrouver ce résultat en utilisant le fait que si A et B commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

3) Quand A est inversible, quel lien y-a-t-il entre e^A et $e^{(A^{-1})}$?

4) Comparer ces propriétés avec celles de l'exponentielle d'un réel.

Exercice 2 Soit t un réel. Calculer e^A e te^{tA} pour les matrices suivantes :

i) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ii) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 Soient x_0 et y_0 des réels. Résoudre le système d'équations différentielles (H) suivant et déterminer la solution de condition initiale (x_0, y_0) en $t = 0$.

$$(H) \qquad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2y(t) \end{cases}$$

Même question pour le système (NH) suivant:

$$(NH) \qquad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + e^t \\ y'(t) = 2y(t) - 3e^{-t} \end{cases}$$

Répondre : i) en "remontant" ; ii) en trouvant une base $(X_1(\cdot), X_2(\cdot))$ de l'ensemble des solutions de (H) puis en cherchant les solution de (NH) sous la forme $\lambda(t)X_1(t)+\mu(t)X_2(t)$; iii) en calculant e^{tA}, puis en appliquant la formule de Duhamel.

Exercice 4 Trouver les solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) - 4x_3(t) \\ x_3'(t) = 4x_1(t) + x_2(t) - 4x_3(t), \end{cases}$$

où x_1, x_2 et x_3 sont des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Calculer e^{tA} si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en remarquant que $A = 2I + N$, où N est nilpotente. En déduire la solution du système:

$$x' = 2x + y + 3z, y' = 2y - z, z' = 2z, x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 1$$

Exercice 6 On considère l'équation d'ordre n : $a_n x^{(n)}(t) + ... + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = Q(t)$ où Q est un polynôme et a_0 ,...a_n des réels tels que $a_n \neq 0$. Montrer que si $a_0 \neq 0$, il existe une (unique) solution polynômiale et qu'elle est de degré $\deg(Q)$. Que peut-on dire si $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$. Application : trouver les solutions particulières polynômiales des équations $x''(t) + x'(t) + x(t) = t$ et $x'''(t) + x''(t) + x'(t) = t$ puis les résoudre.

Exercice 7 (à faire à la maison, résultats donnés en TD) Résoudre les systèmes :

1. $x' = 7x - 3y, y' = 3x + y, x(0) = y(0) = 1$
2. $x' = 3x - 4y + e^t, y' = x - y + e^t, x(0) = y(0) = 1$
3. $x' = x + 2y - 3z, y' = x + y + 2z + t, z' = x - y + 4z - t, x(0) = y(0) = z(0) = 0$

Exercice 8 Trouver les solutions du système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} 2x_1'(t) + x_2'(t) - 3x_1(t) - x_2(t) = t \\ x_1'(t) + x_2'(t) - 4x_1(t) - x_2(t) = e^t, \end{cases}$$

où x_1 et x_2 sont des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 1) Aller voir des vidéos de résonance sur, par exemple :
http://lewebpedagogique.com/physique/quelques-videos-de-resonnances/
2) Soient $\omega > 0$, et $\nu \geq 0$. Résoudre, suivant les valeurs de ν l'équation différentielle

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = \cos(\nu t).$$

Exercice 10 La variation du nombre $x(t)$ des garçons inscrits dans un cours d'aerobic est une fonction linéaire *croissante* du nombre de filles inscrites au club. Le nombre $y(t)$ des filles inscrites est une fonction linéaire *décroissante* du nombre de garçons inscrits:

$$\begin{cases} x' = & ay + b \\ y' = & -cx + d \end{cases} \quad (a, b, c, d > 0)$$

Que se passera-t-il ? Que pensez-vous du rapport entre les conclusions du modèle et les données expérimentales (i.e. la fréquentation des cours d'aérobic dans le monde réel) ? Suggérez un modèle plus en rapport avec ces données ?

Exercice 11 *Le problème du marchand de canons* Deux pays ennemis développent leur potentiel militaire en ajustant instantanémant leurs dépenses d'armement $x(t)$ et $y(t)$ de sorte que:

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \dot{x} = & y - y_0 \\ \dot{y} = & x - x_0 \end{cases}$$

où x_0 et y_0 sont des constantes positives données.

a. Déterminer l'équation des trajectoires du système $(\mathcal{S})$ et vérifier que ce sont des hyperboles dont le centre est l'équilibre (x_0, y_0) du système.

   On observe l'évolution de ce système à partir d'une situation initiale $(x(0), y(0))$ donnée à l'instant $t = 0$ où débute l'observation.

b. Que se passe-t-il si $x(0) + y(0) > x_0 + y_0$? et si $x(0) + y(0) < x_0 + y_0$?

c. Les deux pays se fournissent chez un même marchand d'armes. Celui-ci réussit à contrôler les ventes de sorte qu'à un certain instant T, on ait $x(T) + y(T) = x_0 + y_0$, puis il laisse le système évoluer librement. Que se passera-t-il alors?