Contrôle continu du 10 décembre 2007

Durée 1h. Tous documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1 (2,5 pts). On note j le complexe $j = e^{i2\pi/3}$.

a) (0,5pt) Montrer que $1 + j = e^{i\pi/3}$.

b) (2pts) On admet que la relation définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow (1+z)^3 = (1+z')^3$$

est une relation d'équivalence. Déterminer la classe d'équivalence de j.

Exercice 2 (2pts). Soit $P = X^4 + iX^3 - 3X^2 + (2-3i)X + 2i \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que 1 est racine de P et déterminer sa multiplicité, qu'on notera m. Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de P par $(X-1)^m$.

Exercice 3 (2pts). Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels tels que, pour tout réel x, $P(x) = 1 + \cos x$.

Exercice 4 (5pts). Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, f(z) = z + \frac{1}{z}$$

a) (2pts) L'application f est-elle injective ? surjective ?

b) (1,5pt) Calculer l'image réciproque par f de l'ensemble des nombres réels.

c) (1,5pt) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $f(z) = i$.

Exercice 5 (8,5pts) (si vous bloquez, admettez et continuez).

Soient R_0 et R_1 des polynômes à coefficients réels tel que $deg(R_0) > deg(R_1) > 0$. On définit la suite de polynôme $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: si $R_{n+1} = 0$, alors $R_{n+2} = 0$; sinon, R_{n+2} est le reste de la division euclidienne de R_n par R_{n+1}. On fixe un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) (1pt) Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $R_k = 0$.

2) (1,5pt) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R_{n+1} \neq 0$. Montrer que ($P|R_n$ et $P|R_{n+1}$) si et seulement si ($P|R_{n+1}$ et $P|R_{n+2}$)

3) (3pts) On note m le plus grand entier naturel tel que $R_m \neq 0$.

a) Montrer que ($P|R_0$ et $P|R_1$) si et seulement si ($P|R_m$ et $P|R_{m+1}$).

b) En déduire que ($P|R_0$ et $P|R_1$) si et seulement si $P|R_m$.

4) (3pts) Dans le cas $R_0 = X^5 + X^3 - X + 1$ et $R_1 = X^2 - 1$, calculer R_n pour tout entier naturel n. Déterminer l'ensemble des polynômes à coefficients réels qui divisent à la fois $X^5 + X^3 - X + 1$ et $X^2 - 1$.