Devoir : Théorème de Cantor-Bernstein

1 Introduction

1.1 Enoncé

Le théorème de Cantor-Bernstein s'énonce ainsi : soient E et F deux ensembles quelconques. S'il existe une application $f : E \to F$ injective et une application $g : F \to E$ injective, alors il existe une application $h : E \to F$ bijective.

Bien remarquer que si E et F sont infinis, il n'y a aucune raison que f ou g elles-mêmes soient bijectives.[1]

1.2 Interprétation et importance du résultat

Commençons par prouver le théorème de Cantor-Bernstein dans le cas où les ensembles E et F sont finis. Nous avons vus en cours les résultats suivants :

Lemme 1 : soient A et B des ensembles finis. Il existe une injection A dans B ssi $Card\, A \leq CardB$
Lemme 2 : soient A et B des ensembles finis. Il existe une bijection de A dans B ssi $Card\, A = Card\, B$.

Considérons maintenant des ensembles finis E et F satisfaisant les hypothèses du théorème de Cantor-Bernstein. En applicant le lemme 1 d'abord dans le cas $A = E$ et $B = F$, puis dans le cas $A = F$ et $B = E$, on obtient que $Card\, E = Card\, F$. D'après le lemme 2, il existe donc une bijection de E dans F. Ceci conclue la preuve.

Dans le cas fini, le théorème de Cantor-Bernstein dit donc simplement que si E a moins d'éléménts que F et F a moins d'éléments que E, alors E et F ont autant d'éléments. Associé à d'autres résultats du cours, ceci indique que, dans le cas des ensembles finis, la notion de cardinal d'un ensemble a été correctement défini, au sens ou elle correspond bien à la notion intuitive, concrète. Ceci est simple à voir et peu important. Ce que montre vraiment le théorème de Cantor-Bernstein (associé à d'autres résultats du cours) est qu'on peut définir de manière satisfaisante la notion de cardinal d'un ensemble pour les ensembles infinis.

Les définitions sont les suivantes :

Définitions : Soient E et F des ensembles finis ou infinis. On dit que le cardinal de E est inférieur ou égal au cardinal de F, et on note $Card\, E \leq Card\, F$, s'il existe une injection de E dans F. On dit que E et F ont même cardinal, et on note $Card\, E = Card\, F$, s'il existe une bijection de E dans F.

[1] Nous avons vu en cours qu'il existait une application injective de F dans E si et seulement s'il existait une application surjective de E dans F Dans l'énoncé du théorème, on peut donc remplacer l'hypothèse d'existence d'une application injective de F dans E par l'hypothèse équivalente : "il existe une application surjective de E dans F". L'énoncé devient alors : s'il existe une application $f_1 : E \to F$ injective et une application $f_2 : E \to F$ surjective, alors il existe une application $f_3 : E \to F$ bijective.

Bien remarquer que d'après les lemmes 1 et 2, la définition de la notion de cardinal donné ci-dessus généralise la notion de cardinal pour les ensembles finis. C'est une généralisation satisfaisante au sens où les propriétés essentielles des cardinaux pour les ensembles finis se généralisent :

Proposition 1 *Soient E, F, G des ensembles finis ou infinis. On a :*
a) $Card\, E = Card\, E$;
b) Si $Card\, E = Card\, F$ et $Card\, F = Card\, G$, alors $Card\, E = Card\, G.$;
c) si $Card\, E = Card\, F$ alors $Card\, F = Card\, E$.

Proposition 2 *Soient E, F, G des ensembles finis ou infinis. On a :*
a) $Card\, E \leq Card\, E$;
b) Si $Card\, E \leq Card\, F$ et $Card\, F \leq Card\, G$, alors $Card\, E \leq Card\, G$;
c) Si $Card\, E \leq Card\, F$ et $Card\, F \leq Card\, E$ alors $Card\, E = Card\, F$

Avant de prouver ces propositions, il faut d'abord comprendre qu'elles ne sont pas évidentes. En effet, si E est infini, $Card\, E$ ne désigne pas un entier et le signe $=$ ne désigne pas simplement la relation d'égalité usuelle sur l'ensemble des entiers naturels, mais sa généralisation à l'union de l'ensemble des entiers naturels et de l'ensemble des "cardinaux possibles pour les ensembles infinis". Quand on écrit $Card\, E = Card\, F$, cela veut simplement dire qu'il existe une bijection entre E et F. De même $\leq$ ne désigne pas la relation d'ordre usuelle mais sa généralisation. Ce qu'on cherche à montrer, c'est que les propriétés essentielles des généralisations de $=$ et $\leq$ sont les mêmes que les propriétés des relations usuelles $\leq$ et $=$ sur l'ensemble des entiers naturels. Pour le montrer, il faut utiliser la définition des cardinaux que nous avons donné.

Preuve de la proposition 1 : par définition de la notion de cardinal, a) dit qu'il existe une bijection de E dans E. C'est vrai, par exemple l'identité de E. Le b) dit que s'il existe une bijection de E dans F et une bijection de F dans G alors il existe une bijection de E dans G. En effet, s'il existe une application $f : E \to F$ bijective et une application $g : F \to G$ bijective alors $g \circ f : E \to G$ est bijective comme composée d'applications bijectives, donc il existe une bijection de E dans G. Enfin le c) dit que s'il existe une application $f : E \to F$ bijective alors il existe une application $g : F \to E$ bijective. C'est vrai, par exemple $g = f^{-1}$.

Preuve de la proposition 2 : le a) dit qu'il existe une injection de E dans E. C'est vrai, par exemple l'identité. Le b) dit que s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans G alors il existe une injection de E dans G. C'est vrai (au fait, ami lecteur, pourquoi est-ce vrai ?). Quant au c), eh bien, ce n'est pas si facile à prouver. Le c), c'est le théorème de Cantor-Bernstein qu'il nous faut maintenant démontrer.

2 Preuve du théorème de Cantor-Bernstein : à vous de jouer !

La preuve classique se fait en deux parties. On montre tout d'abord que si E est un ensemble fini ou infini et A une partie de E telle qu'il existe une injection de E dans A alors il existe une bijection de E dans A. Dans la deuxième partie, on prouve le théorème proprement dit.

2.1 Partie I

Soit E un ensemble infini. Soit A $\subset$ E. On suppose qu'il existe une application $f : E \to A$ injective.

Soit $(B_n)_{n \in N}$ la suite de sous-ensembles de E définie par

$$\begin{cases} B_0 = C_E(A) \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = f(B_n) \end{cases}$$

Soit

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{x \in E, \exists n \in \mathbb{N}, x \in B_n\}$$

Préliminaires : pour que ce qui est écrit ci-dessus ait un sens, il faut s'assurer que les B_n sont correctement définis. Le problème qui pourrait se poser est que si pour un certain entier naturel n on avait $B_n \not\subset E$, alors $f(B_n)$ ne serait pas définie. Montrons rapidement que ce problème ne se produit pas. Pour tout entier naturel n, appelons $P(n)$ la propriété : B_n est bien défini et $B_n \subset E$. Il est clair que $P(0)$ est vrai. De plus, si $P(n)$ est vrai alors comme $B_n \subset E$, $f(B_n)$ est bien définie et comme l'ensemble d'arrivée de f est E on a $f(B_n) \subset A \subset E$. Donc B_{n+1} est correctement défini et $B_{n+1} \subset E$. Donc $P(n+1)$ est vrai et par le merveilleux principe de récurrence $P(n)$ est vrai pour tout n dans $\mathbb{N}$. En particulier les ensembles B_n sont bien définis. Maintenant, c'est à vous.

1a) Montrer que $C_E(A) \subset B$. En déduire que pour tout x dans E, si $x \notin B$, alors $x \in A$.

1b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n \subset A$

1c) Montrer que $f(B) \subset A \cap B$.

1d) Soit $g : E \to E$ l'application définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in B \\ g(x) = x & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

En utilisant c) et a), montrer que $g(E) \subset A$.

1e) Soient x et y des éléments de E. Montrer que si $x \in B$ et $y \notin B$, alors $g(x) \neq g(y)$.

1f) Montrer que g est injective.

1g) Soit $y \in A \cap B$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y \in B_n$. En déduire que y a au moins un antécédent par g.

1h) Soit $y \in A \backslash B$. Montrer que y a au moins un antécédent par g.

1i) Déduire des deux questions précédentes que $A \subset g(E)$. En déduire que $g(E) = A$.

1j) Déduire des questions 4g) et 4j) qu'il existe une bijection de E dans A.

2.2 Partie II

On a démontré dans la partie I que pour tout ensemble E, si $A \subset E$ et s'il existe une injection de E dans A, alors il existe une bijection de E dans A. On démontre maintenant le théorème de Cantor-Bernstein proprement dit. Supposons qu'il existe une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$. Attention, les applications f et g ne sont pas les mêmes que les applications notées f et g dans la partie I.

2a) Soit $A = g(F)$. Montrer que $g \circ f(E) \subset A$.

2b) Montrer que la restriction de $g \circ f$ à A comme ensemble d'arrivée est une injection de E dans A. En déduire, en utilisant la partie I, qu'il existe une bijection u de E dans A.

2c) Soit v la restriction de g à A comme ensemble d'arrivée. Montrer que v est une bijection de F dans A.

2d) Montrer qu'il existe une bijection de E dans F.

Commentaires.

Voilà, c'est gagné. Si tout s'est bien passé, vous avez démontré le théorème de Cantor-Bernstein, et montré ainsi qu'on pouvait généraliser de manière satisfaisante la notion de cardinal d'un ensemble aux ensembles infinis. A partir de là, il y a bon nombre de questions à se poser. Par exemple, y-a-t-il une infinité de cardinaux infinis ? La réponse est oui, du fait qu'un ensemble n'est jamais en bijection avec l'ensemble de ses parties. Il y a donc le cardinal de $\mathbb{N}$, qu'on note $\aleph_0$ ("aleph 0"), puis le cardinal de $\mathcal{P}(N)$, qu'on note $\aleph_1$ (et qui est le cardinal de $\mathbb{R}$), puis le cardinal de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(N))$, qu'on note $\aleph_2$, etc. L'hypothèse selon laquelle il existe un ensemble dont le cardinal est strictement entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$ (entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$) s'appelle l'hypothèse du continu. Le mathématicien Cantor a essayé de démontrer ce résultat (ou de démontrer son contraire) pendant de longues années, sans succès. Après la mort de Cantor, il a été montré que ce résultat était indécidable. Cela signifie qu'à partir des axiomes et des règles de logique utilisées par la grande majorité des mathématiciens, il n'est ni possible de démontrer qu'il existe un cardinal intermédiaire entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$, ni possible de démontrer qu'il n'en existe pas. En d'autres termes, il était impossible que Cantor démontre que l'hypothèse du continu était correcte et impossible qu'il démontre qu'elle était fausse. Pauvre Cantor ! [2]

P.S : au fait, $\aleph$, qui se prononce "aleph", c'est le A hébreu.

---

[2] L'expression "axiomes utilisés par la plupart des mathématiciens" peut surprendre si l'on pense qu'il n'y a qu'un système d'axiomes possible. Mais ce n'est pas le cas. Les mathématiques sont une théorie déductive qui part d'un certain nombre de postulats (les axiomes) et de règle d'inférences. Certains postulat sont discutables. On peut donc raisonnablement les accepter ou les rejeter. Aussi peut-on bâtir différentes mathématiques, suivant les axiomes dont on part. On a par exemple étudié de manière très fructueuse des géométries non-euclidiennes, qui se sont révélés à posteriori, avec la théorie de la relativité générale, plus à même de décrire notre monde que la géométrie classique (c'est à dire euclidienne). On a également beaucoup débattu du fait d'accepter ou de rejeter l'axiome du choix, qui, sous une de ses formes, affirme que tout produit d'ensembles non vide est non vide (ce qui n'est pas particulièrement naturel lorsqu'il s'agit d'un produit d'un nombre non dénombrable d'ensembles). Si la plupart des mathématiciens utilisent l'axiome du choix, certains mathématiciens continuent à bâtir des théories alternatives, en remplaçant l'axiome du choix par un ou des axiomes qui leur semblent plus naturels. Comme le disait le grand mathématicien John von Neumann, les mathématiques sont une science expérimentale : on essaie des axiomes, on regarde s'ils sont satisfaisants, utiles, et sinon on en change.