Notations pour les sommes, produits, unions et intersections

1 Les sommes

1.1 Introduction

En mathématiques, on considère souvent des sommes d'un grand nombre de termes, ou des produits, des unions d'ensembles, etc., et l'on a besoin pour cela de notations précises. Prenons l'exemple des sommes. Supposons que l'on souhaite désigner la somme des carrés des n premiers entiers non nuls, où $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

et nous utiliserons d'ailleurs souvent cette notation. Cependant, elle est peu précise (que veulent exactement dire les pointillés ? si je ne connais pas la valeur de n, il se peut que $n = 2$, et dans ce cas, que vient faire le terme 3^2 dans l'expression écrite ci-dessus ? Si on écrit $3+5+7+...+17+19$, cela désigne-t-il la somme des nombres premiers compris entre 3 et 19, ou bien la somme des entiers impairs compris entre 3 et 19 ?). De plus, et c'est là le principal problème, elle ne peut pas se généraliser à des situations plus compliquées, dont nous donnerons des exemples à la fin de ce document. Aussi les mathématiciens préfèrent-ils désigner la somme précédente par l'une des expressions suivantes :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{ou encore} \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^2$$

Pour vérifiez que vous suivez, que vaut la somme ci-dessous ?

$$\sum_{1 \leq k \leq 3} k^2$$

La réponse est dans la note de bas de page.[1]

De même, soient m et n des entiers naturels. Si l'on veut désigner la somme des carrés de tous les entiers k tels que $m \leq k \leq n$, on peut écrire :

$$m^2 + (m+1)^2 + ... + n^2$$

mais il sera parfois préférable d'utiliser l'une des notations suivantes :

$$\sum_{m \leq k \leq n} k^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=m}^{n} k^2 \quad \text{ou encore} \quad \sum_{k=m}^{k=n} k^2$$

Nouvel exercice : calculer

$$\sum_{2 \leq k \leq 5} k^2$$

[1] On a $\sum_{1 \leq k \leq 3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

La réponse est dans la nouvelle note de bas de page.[2]

Il est important de comprendre que, dans les expressions précédentes, l'indice k est muet : au lieu de

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

on pourrait tout aussi bien écrire

$$\sum_{p=1}^{n} p^2$$

ou encore

$$\sum_{q=1}^{n} q^2$$

Cela désignerait toujours l'ensemble des carrés des n premiers entiers non nuls. La seule chose qu'il ne faudrait pas écrire, c'est

$$\sum_{n=1}^{n} n^2$$

car n désignerait alors à la fois l'indice générique et la plus grande valeur de l'indice dans la somme, et un même symbole ne peut avoir deux sens différents dans une expression donnée, sinon on ne comprend plus rien.

1.2 Généralisons...

1) Supposons que pour tout entier naturel k, on se donne un réels a_k (on dit alors qu' $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels indicée par $\mathbb{N}$). Si l'on veut désigner la somme des termes a_k pour k allant de m à n, on peut écrire

$$a_m + a_{m+1} + ... + a_n$$

ou bien utiliser l'une des notations suivantes :

$$\sum_{m\leq k\leq n} a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{k=m}^{n} a_k \quad \text{ou encore} \quad \sum_{k=m}^{k=n} a_k$$

Les exemples précédents correspondent au cas particulier $a_k = k^2$. Allez, un petit exercice pour digérer : calculer

$$\sum_{k=1}^{4} \cos(k\pi/2)$$

Comme toujours, réponse en note de bas de page.[3]

[2] On a $\sum_{2\leq k\leq 5} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54$

[3] On a $\sum_{k=1}^{4} \cos(k\pi/2) = \cos(\pi/2) + \cos(2\pi/2) + \cos(3\pi/2) + \cos(4\pi/2) = \cos(\pi/2) + \cos(\pi) + \cos(3\pi/2) + \cos(2\pi) = 0 + (-1) + 0 + 1 = 0$. Tiens ça alors ! Est-ce que par hasard la somme $\sum_{k=1}^{n} cos(2k\pi/n)$ ferait toujours 0 ?

2) Supposons maintenant qu'on veuille désigner la somme des termes a_k pour k dans un certain sous-ensemble I de $\mathbb{N}$. On écrit alors :

$$\sum_{k \in I} a_k$$

Par exemple, si $I = \{2, 3, 7\}$ et $a_k = k^2$, que vaut la somme suivante ?

$$\sum_{k \in \{2,3,7\}} k^2$$

Devinez où se trouve la réponse.[4]

3) Un cas particulier important est le suivant : soit $P(k)$ une proposition qui dépend de l'entier naturel k, et qui peut donc être vraie ou fausse suivant les valeurs de k. La notation pour désigner la somme des termes a_k pour les valeurs de k telles que $P(k)$ est vraie est :

$$\sum_{\{k \in \mathbb{N}, P(k)\}} a_k$$

Par exemple[5], soit $P(k)$ la propriété : $2^k \leq 10$. On a alors $\{k \in \mathbb{N}, P(k)\} = \{k \in \mathbb{N}, 2^k \leq 10\} = \{0, 1, 2, 3\}$. Donc

$$\sum_{\{k \in \mathbb{N}, 2^k \leq 10\}} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

4) Le plus souvent, l'ensemble auquel appartiennent les indices est l'ensemble des entiers naturels. Mais ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, on peut vouloir considérer la somme des carrés des entiers relatifs compris entre -5 et 5. On écrira alors soit

$$(-5)^2 + (-4)^2 + ... + 5^2$$

soit

$$\sum_{\{k \in \mathbb{Z}, -5 \leq k \leq 5\}} k^2$$

soit encore l'une des expressions suivantes :

$$\sum_{-5 \leq k \leq 5} k^2 \text{ ou } \sum_{k=-5}^{5} k^2$$

1.3 Le cas général (ce qu'il suffit de retenir)

D'une manière générale : soit I un ensemble, qu'on appellera ensemble d'indices. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels indicée par i, c'est à dire la donnée d'un réel a_i pour

[4] On a $\sum_{k \in \{2,3,7\}} k^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2 = 4 + 9 + 49 = 62$.

[5] Si l'on voulait être cohérent avec la notation $\sum_{k \in I} a_k$, il faudrait écrire $\sum_{k \in \{k \in \mathbb{N}, P(k)\}} a_k$. On le fera parfois, mais cette notation est un peu lourde.

chaque élément i de I. Soit $P(i)$ une proposition qui dépend de i.

• Pour désigner la somme de tous les termes a_i indicés par un élément i de I, on écrit :

$$\sum_{i\in I} a_i$$

• Pour désigner la somme des termes a_i indicés par un élément i de I tel que $P(i)$ est vraie, on écrit :

$$\sum_{\{i\in I, P(i)\}} a_i$$

ou simplement

$$\sum_{P(i)} a_i$$

lorsque qu'il n'y a pas ambiguité sur l'ensemble I.

• Dans le cas où I est l'ensemble des entiers relatifs plus grand que m et plus petit que n, on dispose aussi des notations

$$\sum_{m\leq k\leq n} a_k$$

et

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

Un exemple où l'ensemble des indices est $\mathbb{R}$: supposons qu'on veuille désigner la somme des carrés des solutions réelles de l'équation $x^2-4x+3=0$. On est alors dans le cas où $I=\mathbb{R}$ et où $P(x)$ est la proposition $x^2-4x+3=0$. On écrira donc

$$\sum_{\{x\in\mathbb{R}, x^2-4x+3=0\}} x^2$$

Comme $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, on a donc :

$$\sum_{\{x\in\mathbb{R}, x^2-4x+3=0\}} x^2 = 1^2+3^2=10$$

1.4 Compléments

1) **Cas particuliers**. Soient m et n des entiers. Revenons au cas où on cherche à désigner la somme de tous les termes a_k indicés par un entier k tel que $m\leq k\leq n$. On a les cas particulier suivants :

• *si* $m=n$ *:* il n'y a alors qu'un seul terme dans la somme. Par exemple,

$$\sum_{k=3}^{3} k^2 = 3^2 = 9$$

• *si $m > n$:* il n'y a alors aucun indice k tel que $m \leq k \leq n$. La somme est donc vide et vaut par convention 0. Par exemple,

$$\sum_{k=4}^{3} k^2 = 0$$

• *si pour toutes les valeurs de k considérées, a_k a la même valeur, c'est à dire si a_k ne dépend pas de k :* la somme est alors tellement simple à calculer que cela peut vous troubler. Par exemple, supposons que pour tout entier k entre 0 et 5 on ait $a_k = 10$. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5} 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 \text{ (5 fois) } = 50$$

Plus généralement, si m et n sont des entiers tels que $m \leq n$:

$$\sum_{k=1}^{n} 10 = 10 + 10 + ... + 10 \text{ (}n\text{ fois) } = 10n$$

et

$$\sum_{k=m}^{n} 10 = 10 + 10 + ... + 10 \text{ (}n - m + 1\text{ fois) } = 10(n - m + 1)$$

Bien sur si $m > n$, on a comme expliqué précedemment : $\sum_{k=m}^{n} 10 = 0$, car la somme est alors vide.

2) **N'écrire que des expressions qui ont un sens.** Au stade où vous en êtes, vous ne savez donnez de sens qu'à des sommes finies. Aussi, lorsqu'on considère une somme du type $\sum_{i \in I} a_i$ faut-il bien faire attention à ce que l'ensemble I soit fini (ou sinon à ce que l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$ soit fini : la somme ne comportant alors qu'un nombre fini de termes non nuls, elle ne pose pas de problèmes).

Quand vous serez plus grand, vous apprendrez à donnez un sens à certaines sommes comportant un nombre infini de termes, grâce à la notion de limite. Vous apprendrez aussi pourquoi il y a des sommes infinies auxquelles on ne peut pas donner de sens.

3) Une même somme peut s'écrire de plusieurs façons. Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons qu'on veuille désigner la somme des nombres $f(k)$, pour k pair et compris entre 2 et 20, c'est à dire

$$f(2) + f(4) + f(6) + ... + f(20)$$

On a plusieurs choix. On peut tout d'abord écrire :

$$\sum_{k \text{ pair }, 2 \leq k \leq 20} f(k)$$

On peut aussi remarquer que l'ensemble des entiers pairs compris entre 2 et 20 est l'ensemble des entiers de la forme $2p$ avec p compris entre 1 et 10. La somme précédente peut donc s'écrire aussi :

$$\sum_{1 \leq p \leq 10} f(2p)$$

Autre exemple : soit n un entier et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=4}^{n+3} a_{k-3} = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Pour voir rapidement que les deux premières sommes sont égales, on peut raisonner ainsi : considérons la deuxième somme : pour $k = 0$, on a $k + 1 = 1$. Le premier terme de la somme est donc a_1. Pour $k = n - 1$, on a $k + 1 = n$. Le dernier terme de la somme est donc a_n. On somme donc tous les termes a_i pour i allant de 1 à n, comme dans la première somme. Les deux sommes sont donc égales. On peut vérifier de la même façon que la troisième somme représente toujours la somme des a_i pour i allant de 1 à n.

Exercice : pour tout entier relatif k, on pose $a_k = k^2$. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} a_{2k-5}$? Réponse ici.[6]

2 Le cas des produits, unions, intersections, produits d'ensembles,...

Tout se passe comme pour les sommes, à un point près : définir l'union ou l'intersection d'un nombre infini d'ensembles ne pose aucun problème.

2.1 Les produits

Le symbole pour le produit est $\prod$. Supposons qu'on veuille désigner le produit des carrés des 10 premiers entiers. On écrit alors soit $1^2 \times 2^2 \times .. \times 10^2$, soit, de manière plus précise :

$$\prod_{1 \leq k \leq 10} k^2 \text{ ou } \prod_{k=1}^{10} k^2$$

Autres exemples : soit n un entier naturel non nul.

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times ... \times n = n!$$

$$\prod_{k \in \{2,5,7\}} 3^k = 3^2 \times 3^5 \times 3^7 = 3^{14}$$

[6] On a $\sum_{k=2}^{4} a_{2k-5} = a_{-1} + a_1 + a_3 = 1 + 1 + 9 = 11$

Amusons-nous un peu : étant donné que $3^2 \times 3^5 \times 3^7 = 3^{(2+5+7)}$ et que $2+5+7$ peut s'écrire $\sum_{k\in\{2,5,7\}} k$, on a donc la jolie formule suivante :

$$\prod_{k\in\{2,5,7\}} 3^k = 3^{\left(\sum_{k\in\{2,5,7\}} k\right)}$$

Si vous avez mal à la tête, faites une pause, un peu de musique, et on reprend.

2.2 Les unions et les intersections.

Les symboles utilisés sont $\bigcup$ pour l'union et $\bigcap$ pour l'intersection. Supposons que pour tout entier naturel k, on dispose d'un ensemble noté A_k. On a alors :

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Rappelons que l'indice est muet : $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$ veut dire la même chose que $\bigcup_{k=1}^{3} A_k$.

$$\bigcup_{k\in\{0,3,6,9\}} A_k = A_0 \cup A_3 \cup A_6 \cup A_9 \quad \text{et} \quad \bigcap_{k\in\{0,3,6,9\}} A_k = A_0 \cap A_3 \cap A_6 \cap A_9$$

D'une manière générale, soit I un ensemble (fini ou infini). Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indicée par i (cela signifie simplement que pour tout i dans I, A_i est un ensemble).

• l'union de tous les ensembles A_i se note $\bigcup_{i\in I} A_i$. C'est l'ensemble des "objets" qui appartiennent a au moins l'un des ensembles A_i :

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$$

• l'intersection de tous les ensembles A_i se note $\bigcup_{i\in I} A_i$. C'est l'ensemble des "objets" qui appartiennent à tous les ensembles A_i :

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$$

Dans les expressions précédentes, I peut être infini, comme dans l'exemple suivant :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[= \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$$

Exercice : pour tout entier relatif k, on pose $A_k = [k, k+10]$. Que valent les unions et intersections suivantes ?

1) $\bigcup_{k=3}^{9} A_k$; 2) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$; 3) $\bigcap_{k=3}^{9} A_k$; 4) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$

Réponses ici.[7]

Exercice (plus difficile) : que valent les unions et intersections suivantes ?

1) $\bigcup_{x\in\mathbb{R}} [\sin x, 1+\sin x]$; 2) $\bigcup_{x\in[1,+\infty[} \left]\frac{1}{x}, x\right[$; 3) $\bigcap_{x\in[1,+\infty[} \left]\frac{1}{x}, x\right[$; 4) $\bigcap_{x\in[1,+\infty[} \left[\frac{1}{x}, x\right]$

Réponses en note, mais ne les consultez pas tout de suite.[8]

Pour désigner des unions et intersections d'un nombre infini d'ensembles, comme ci-dessus, les notations du type $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ ne sont pas satisfaisantes (d'une part parce qu'il n'y a pas de dernier terme, d'autre part parce que l'ensemble des indices peut être un ensemble continu, comme $\mathbb{R}$). C'est l'une des raisons qui font qu'il est impératif d'introduire des notations précises et générales, même si c'est douloureux au début.

2.3 Les produits d'ensembles (ou produits cartésiens)

Soit n un entier naturel non nul. Pour tout entier k de $\{1, 2, ..., n\}$, soit E_k un ensemble. L'ensemble $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ se note aussi

$$\times_{i=1}^{n} E_i$$

(normalement les indices sont en dessous et au dessus du signe $\times$, s'il apparaissent sur le côté, c'est juste à cause d'un problème informatique). On a donc :

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in \times_{i=1}^{n} E_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, x_i \in E_i$$

Cas particulier où les E_i sont tous égaux à un même ensemble E : on peut alors écrire E^2 au lieu de $E \times E$, E^3 au lieu de $E \times E \times E$ et plus généralement E^n au lieu de $E \times E \times ... \times E$ (n fois). Certains d'entre vous ont d'ailleurs déjà vu ces notations dans le cas où $E = \mathbb{R}$.

Exercice : au restaurant universitaire de l'université Deuxphine, un repas comprend une entrée, un plat et un dessert (on est obligé de prendre les trois et exactement un de chaque). Les choix sont les mêmes tous les jours : l'entrée appartient à l'ensemble $E_1 = \{\text{carottes, tomates}\}$, le plat à l'ensemble $E_2 = \{\text{poulet, pizza}\}$ et le dessert à l'ensemble $E_3 = \{\text{noix de coco, orange, tartelette}\}$.

1) Ecrire quelques exemples d'éléments du produit cartésien $\times_{i=1}^{3} E_i$.

2) Combien d'éléments à l'ensemble $\times_{i=1}^{3} E_i$?

3) On appelle "menu" la donnée d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Combien de menus différents un étudiant de Deuxphine peut-il composer ? Quel rapport avec $E_1 \times E_2 \times E_3$?

Ainsi s'achève, sur un goût de poulet-coco, notre premier séjour au pays des indices. La compagnie MIDO espère que votre séjour a été agréable, et vous souhaite une bonne continuation de voyage.

[7] 1) $[3, 19]$; 2) $[0, +\infty[$; 3) $[9, 13]$; 4) $\emptyset$

[8] 1) $[-1, 2]$; 2) $\mathbb{R}_+^*$; 3) $\emptyset$; 4) $\{1\}$