Complexes, arithmétique élémentaire et divers

Exercice 1 Déterminer tous les complexes z tels que $z + \bar{z} = i$.

Exercice 2 *(Tous TD)* (Méthode pour calculer les racines carrées d'un nombre complexe en coordonnées cartésiennes)
Soient a et b des réels et $z = a + ib$. Soient x et y des réels.
1) Déterminer les racines carrées de z dans le cas $b = 0$. Dans la suite, on supposera $b \neq 0$ et on notera $sgn(b) = b/|b|$. Montrer que

$$(x+iy)^2 = a+ib \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \left[a + \sqrt{a^2+b^2}\right]/2 \\ 2xy = b \\ y^2 = \left[-a + \sqrt{a^2+b^2}\right]/2 \end{cases}$$

2) On pose

$$x_+ = \sqrt{\left[a + \sqrt{a^2+b^2}\right]/2} \quad , \quad y_+ = \sqrt{\left[-a + \sqrt{a^2+b^2}\right]/2}.$$

On pose $\epsilon = sgn(b)$. Déduire du 1) que $(x+iy)^2 = a+ib$ si et seulement si $\begin{cases} x = x_+ \\ y = \epsilon y_+ \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -x_+ \\ y = -\epsilon y_+ \end{cases}$
3) Application : déterminer les racines carrées de $3+5i$ et de $3-5i$.

Exercice 3 $(*)$ Donner le quotient et le reste dans la division euclidienne : a) de 43 par 5 ; b) de -43 par -5 ; c) de 43 par -5 ; d) de -43 par 5.

Exercice 4 Quels sont tous les nombres premiers plus petits que 50 ? (suggestion aux chargés de TD : on pourra à cette occasion expliquer la méthode du crible d'Eratosthène).

Exercice 5 Soit n un entier naturel plus grand que 2. Montrer que si aucun entier naturel $k \leq \sqrt{n}$ ne divise n alors n est premier. En déduire que 251 est premier, puis décomposer 2008 en produit de nombres premiers.

Exercice 6 $(*)$ Donner la décomposition en facteurs premiers de 60, 61, 62, 63, 64 et 65.

Exercice 7 Soient a et b deux entiers naturels plus grand que 2. Montrer que a divise b si et seulement si les facteurs premiers qui apparaissent dans la décomposition de a apparaissent aussi dans celle de b, et à une puissance au moins aussi grande que dans la décomposition de a.

Exercice 8 Calculer le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple des ensembles suivants : a) $A_1 = \{1,2,3,4\}$; b) $A_2 = \{4,6\}$, c) $A_3 = \{10,21\}$; $A_4 = \{2,4,6,8,10\}$

Exercice 9 $(*)$ (variante de la démonstration par les grecs anciens du fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel).
a) Montrer que si $\sqrt{2}$ rationnel, alors il existe des entiers non nuls p et q tels que $p^2 = 2q^2$.
b) Montrer que si n est un entier naturel, alors dans la décomposition en facteurs premiers de n^2, tous les facteurs premiers apparaissent à une puissance paire.
c) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 10 a) Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$, puis que : $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$.
b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ des réels positifs tels que $x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \leq n+1$. Montrer que :

$$x_1 + ... + x_n \leq n\alpha, \qquad \text{où } \alpha = 1 + \frac{1}{n} - \frac{x_{n+1}}{n}.$$

c) Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1 \in \mathbb{R}_+, ..., \forall x_n \in \mathbb{R}_+$,

$$x_1 + \cdots + x_n \leq n \Rightarrow x_1 x_2 \cdots x_n \leq 1$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. Comparer leur moyenne géométrique $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ et leur moyenne arithmétique $\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

Exercice 11 Soient x et y des réels non multiples de 2π. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A = \{(k,l) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq k \leq n \text{ et } 0 \leq l \leq n\}$.
1) Calculer $\sum_{(k,l)\in A} 2^k 3^l$
2) Donner une expression (relativement) simple pour $\sum_{(k,l)\in A} \cos(kx + ly)$. Application : calculer cette somme dans le cas $x = \pi/3$, $y = \pi/2$, $n = 120$.