Corrigé du devoir sur le théorème de Cantor-Bernstein

1a) On a $B_0 = C_E(A)$. Par conséquent, si $x \in C_E(A)$, alors $x \in B_0$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_n$, donc $x \in B$. Donc $C_E(A) \subset B$. Soit $x \in E$. On vient de voir que si $x \notin A$, alors $x \in B$. Puisqu'une implication et sa contraposée sont équivalentes, on a donc aussi : si $x \notin B$, alors $x \in A$.

1b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m = n + 1$. Donc $B_n = B_{m+1} = f(B_m)$. Or comme f a pour ensemble d'arrivée A, on a $f(B_m) \subset A$. Donc $B_n \subset A$.

1c) Puisque f a comme ensemble d'arrivée A on a $f(B) \subset A$. Il suffit donc de montrer que $f(B)$ est inclus dans B. Faisons-le : soit $y \in f(B)$. Par définition de $f(B)$, il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. Par définition de B, il existe un entier naturel n tel que $x \in B_n$. Puisque $y = f(x)$, on a $y \in f(B_n) = B_{n+1}$, donc $y \in B_m$ pour $m = n + 1$, donc $y \in B$.

Remarque : on peut aussi faire le raisonnement suivant. On a

$$f(B) = f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{n+1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = B$$

1d) Soit $x \in E$. Si $x \in B$ alors $g(x) = f(x)$; or $f(x) \in A$ car A est l'ensemble d'arrivée de f, donc $g(x) \in A$. Sinon, $x \notin B$, donc $g(x) = x$; de plus, d'après la question 1a), $x \in A$, donc $g(x) \in A$. Donc dans tous les cas $g(x) \in A$. Donc $g(E) \subset A$.

1e) Soient $x \in B$ et $y \in C_E(B)$. Comme $x \in B$, on a $g(x) = f(x)$ et $f(x) \in f(B)$. Or d'après la question 1c), $f(B) \subset B$, donc $f(x) \in B$ et donc $g(x) \in B$. De plus, comme $y \notin B$, on a $g(y) = y$ donc $g(y) \notin B$. Puisque $g(x) \in B$ et $g(y) \notin B$, on a $g(x) \neq g(y)$.

1f) Soient x et y des éléments de E tels que $x \neq y$. Pour montrer que g est injective, il suffit de montrer que $g(x) \neq g(y)$. Il y a 4 cas possibles : $x \in B$ et $y \in B$; $x \in B$ et $y \notin B$; $x \notin B$ et $y \in B$; $x \notin B$ et $y \notin B$.

Si $x \in B$ et $y \in B$, alors $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$. De plus, comme f est injective et $x \neq y$, on a $f(x) \neq f(y)$, donc $g(x) \neq g(y)$.

Si $x \in B$ et $y \notin B$, alors, d'après la question 1e), $g(x) \neq g(y)$. Le cas $x \notin B$ et $y \in B$ est symétrique (on inverse juste le rôle de x et de y).

Enfin, si $x \notin B$ et $y \notin B$, alors $g(x) = x$ et $g(y) = y$, donc comme $x \neq y$, on a $g(x) \neq g(y)$. Donc dans tous les cas, $g(x) \neq g(y)$. Donc g est injective.

1g) Puisque $y \in B$, il existe un entier naturel n tel que $y \in B_n$. Puisque $y \in A$ et $B_0 = C_E(A)$, $y \notin B_0$, donc $n \neq 0$, donc $B_n = f(B_{n-1})$. Donc il existe $x \in B_{n-1}$ tel que $y = f(x)$. Puisque $B_{n-1} \subset B$, on a $x \in B$ donc $g(x) = f(x)$ donc $y = g(x)$. Donc y a au moins un antécédent par g.

1h) Puisque $y \in A \backslash B$, on a $y \notin B$ donc $g(y) = y$, donc y a au moins un antécédent par g : lui-même.

1i) Si $y \in A$, alors $y \in A \cap B$ ou $y \in A \setminus B$, et d'après les questions 1g) et 1h), dans les deux cas, y a au moins un antécédent par g, donc $y \in g(E)$. Donc $A \subset g(E)$. Comme, d'après la question 1d), on a $g(E) \subset A$, on obtient par double inclusion $g(E) = A$.

1j) D'après un résultat du cours, si une application g d'espace de départ E est injective, alors l'application $h : E \to g(E)$ telle que pour tout x dans E, $h(x) = g(x)$, est bijective (on dit que g induit une bijection de E dans $g(E)$). Puisque $g(E) = A$, l'application h est donc une bijection de E dans A.

Remarque : il y avait une faute de frappe dans l'énoncé de la question 1j), il fallait lire : déduire des questions 1f) et 1i) qu'il existe une bijection de E dans A.

Partie II

2a) Tout d'abord (et vous avez le droit de l'utiliser directement)

$$(g \circ f)(E) = \{(g \circ f)(x), x \in E\} = \{(g(f(x)), x \in E\} = \{(g(y), y \in f(E)\} = g(f(E))$$

De plus, $f(E) \subset F$ donc $g(f(E)) \subset g(F) = A$. Donc $(g \circ f)(E) \circ A$

2b) Remarquons tout d'abord que puisque $g \circ f(E) \subset A$, on peut bien définir la restriction de $g \circ f$ à A comme ensemble d'arrivée. De plus, puisque f et g sont injectives, l'application composée $g \circ f$ est injective. Donc toute ses restrictions sont injectives, en particulier sa restriction à A comme ensemble d'arrivée.

2c) Tout d'abord, puisque $g(F) = A$, donc $g(F) \subset A$, l'application v est bien définie. Ensuite, puisque g est injective et que v est une restriction de g, l'application v est injective. Enfin, $v(F) = g(F) = A$ donc comme A est l'ensemble d'arrivée de v, l'application v est surjective. Donc elle est bijective.

2d) L'application $v \circ f$ est bien définie, va de E dans A, et est injective comme composée d'applications injectives. Il existe donc une injection de E dans A. Donc, d'après la partie I, il existe une bijection u de E dans A. L'application $h = v^{-1} \circ u$ va de E dans F et est bijective comme composée d'applications bijectives. Il existe donc bien une bijection de E dans F.

Remarque : le fait que E soit un ensemble infini n'a jamais été utilisé. C'était indiqué juste pour que vous ne fassiez pas de raisonnements qui ne sont corrects que pour des ensembles finis.

Pour en savoir plus sur le théorème de Cantor-Bernstein, vous pouvez consulter par exemple le site (qu'on trouve en tapant "Cantor-Berstein" sur Google) :

http ://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Cantor-Bernstein