Correction du contrôle continu d'algèbre du 13 octobre 2008

Durée 1h10. Tous documents et calculatrices interdits. Le barême est approximatif. Il faut tourner la page.

Partie I (7pts) : aucune justification demandée

Exercice 1 (1,5pt) Soit E un ensemble. Soient A, B, C, D des parties de E. Soit P la proposition :

P : Pour tout x dans E, si ($x \in A$ et $x \in B$) alors ($x \in C$ ou $x \in C_E(D)$).

a) Donner la négation de P : Il existe x dans E tel que ($x \in A$ et $x \in B$) et ($x \notin C$ et $x \in D$).
(des variantes sont possibles ; ainsi, comme x est dans E, on peut écrire $x \in C_E(C)$ au lieu de $x \notin C$)

b) P est-elle vraie dans le cas $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{R}_-$, $C = \mathbb{N}$, $D = \mathbb{Z}$? Oui, P est vraie : en effet, pour tout x dans $\mathbb{R}$, si ($x \in \mathbb{R}_+$ et $x \in R_-$), alors $x = 0$, donc $x \in \mathbb{N}$, donc ($x \in \mathbb{N}$ ou $x \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$)

Exercice 2 (2,5pts) Que valent les intersections, unions et sommes suivantes ?

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right[= \{1\} = [1, 1]$$

Aucune justification n'était demandée. Si vous aviez dû justifier, vous auriez pu rédiger ainsi :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $A_n = \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right[$. Posons $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $1 \leq 1 < 1 + (1/n)$, donc $1 \in A_n$. Ceci est vrai pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, donc $1 \in A$, donc $\{1\} \subset A$.

Réciproquement, montrons que $A \subset \{1\}$. Par contraposée, il suffit de montrer que pour tout réel x, si $x \neq 1$, alors $x \notin A$. Soit donc un réel $x \neq 1$. Si $x < 1$, alors $x \notin A_1$ donc $x \notin A$. Sinon, $x > 1$, et il existe un entier n tel que $n > 1/(x-1)$. Pour cet entier n, on a $1 + (1/n) < x$ (faites-le calcul ! évidemment, ça ne tombe pas du ciel, je suis parti de la condition $x < 1 + (1/n)$ et j'ai cherché une condition suffisante sur n pour qu'on ait $x < 1 + (1/n)$) donc $x \notin A_n$. De ce fait, $x \notin A$. Ceci finit de prouver que $A \subset \{1\}$. Par double inclusion, on a donc $A = \{1\}$.

$$\bigcup_{x \in]1, +\infty[} \left] -\frac{1}{x}, x \right[=]-1, +\infty[$$

$$\sum_{\{k \in \mathbb{N}, 0 \leq k^2 \leq 10\}} (-1)^k k^2 = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k k^2 = 0 - 1 + 4 - 9 = -6$$

Exercice 3 (2pts) Soient E et F des ensembles contenant au moins deux éléments. Les propositions suivantes sont-elles vraies pour n'importe quelle application $f : E \to F$?

$\forall A \subset E, \forall B \subset E, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ faux (l'inclusion peut être stricte)

$\forall A \subset E, \forall B \subset E, f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ vrai

$\forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) \subset A$ faux (l'inclusion réciproque est vraie)

$\forall D \subset F, f(f^{-1}(D)) = D$ faux (il y a juste une inclusion)

Exercice 4 (1pt) Qu'est-ce qu'une preuve par contraposée ? Une preuve par contraposée consiste à prouver une implication "si P alors Q" en prouvant sa contraposée "Si nonP alors nonQ", qui lui est équivalente.

Partie II (13pts) : les réponses doivent être justifiées.

Exercice 5 (3pts) Soient E, F, G des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Redémontrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective : voir le cours (bien sûr, des preuves différentes de celle du cours sont possibles).

Exercice 6 (4pts) Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E, et $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leur complémentaires dans E. Montrer l'équivalence des 4 propositions suivantes :

$$(i)\, A \cap B = \emptyset \quad ; \quad (ii)\, A \subset \bar{B} \quad ; \quad (iii)\, \bar{A} \cup \bar{B} = E \quad ; \quad (iv)\, B \subset \bar{A}$$

Faisons une preuve cyclique, en montrant les implications $(i) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iv)$ et $(iv) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (iii)$: si $A \cap B = \emptyset$ alors $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset}$ donc $\bar{A} \cup \bar{B} = E$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: supposons (iii). Soit $x \in A$. On a $x \in E$ donc $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$ par (iii). Mais $x \notin \bar{A}$, puisque $x \in A$. Donc $x \in \bar{B}$. Donc $A \subset \bar{B}$.

$(ii) \Rightarrow (iv)$: si $A \subset \bar{B}$ alors d'après le cours $\overline{\overline{B}} \subset \bar{A}$ or $\overline{\overline{B}} = B$, donc $B \subset \bar{A}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: si $B \subset \bar{A}$, alors $A \cap B \subset A \cap \bar{A} = \emptyset$, donc $A \cap B = \emptyset$.

On a donc montré $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$, ce qui prouve bien que les propositions (i), (ii), (iii), (iv) sont équivalentes.

Exercice 7 (6pts) Soit A un ensemble. Soit J un ensemble d'indices. Pour tout j dans J, soit B_j un ensemble.

a) Redémontrer que :

$$A \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{j \in J} (A \cap B_j)$$

Raisonnons par double inclusion. Montrons tout d'abord $A \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) \subset \bigcup_{j \in J} (A \cap B_j)$:

soit $x \in A \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$. On a $x \in A$ et $x \in \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$. Comme $x \in \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$, il existe un indice $j \in J$ tel que $x \in B_j$. Comme $x \in A$, pour cet indice j, $x \in A \cap B_j$. Donc $x \in \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$, ce qui prouve l'inclusion désirée.

Réciproquement, montrons que $\bigcup_{j \in J} (A \cap B_j) \subset A \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$. Soit $j \in J$. On a $A \cap B_j \subset A$ et $A \cap B_j \subset B_j \subset \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$. Donc $(A \cap B_j) \subset A \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$. Ceci est vrai pour tout j dans J, donc $\bigcup_{j \in J} (A \cap B_j) \subset A \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)$ et par double inclusion on a égalité.

b) Soit I un ensemble d'indice. Pour tout i dans I, soit A_i un ensemble. Déduire du (a) que :

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_j) \right)$$

Posons tout d'abord $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. D'après le a), $A \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{j \in J} (A \cap B_j) = \bigcup_{j \in J} ((\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B_j)$. Fixons maintenant $j \in J$. D'après le a) et la commutativité de l'intersection, $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B_j = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_j)$. Ceci étant vrai pour tout j dans J, on trouve finalement

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_j) \right)$$

Si vous avez tout réussi, ne vous arrêtez pas de travailler sous prétexte que vous êtes très très fort et n'en avez pas besoin : ça a joué des tours à beaucoup de vos camarades !

Si vous avez tout raté, ne vous découragez pas, continuer de (ou commencez à) travailler régulièrement. Il est normal d'avoir des difficultés en mathématiques à l'entrée à l'université, car les mathématiques qu'on y fait sont plus abstraites et plus rigoureuses qu'au lycée. Vous vous y habituerez.