Corrigé du partiel d'algèbre 1 du 13 novembre 2008

Exercice 1. a) $nonP(x)$: $(\exists a \in A, a \not\leq x)$ ou $[\exists y \in E, (\forall a \in A, a \leq y)$ et $x \not\leq y]$

b)La borne supérieure de A.

Exercice 2. $-16i = 2^4(-i) = 2^4 e^{-i\pi/2}$ donc l'ensemble des racines quatrièmes de $-16i$ est

$$\left\{2e^{-i\pi/8}e^{i2k\pi/4)}, k \in \{0,1,2,3\}\right\} = \left\{2e^{-i\pi/8)}, 2e^{i3\pi/8}, 2e^{i7\pi/8}, 2e^{i11\pi/8}\right\}$$

Exercice 3. $(27,16)$, par exemple, est un majorant de A. En fait, n'importe quel couple (x,y) tel que $x \geq 1$ et $y \geq 1$ est un majorant de A.

A a un unique élément maximal : $(0,1)$. Bien voir que si (x,y) est dans A et $(x,y) \neq (0,1)$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $(x+\epsilon)^2 + (y+\epsilon)^2 < 1$ (par exemple $\epsilon = (1-x^2-y^2)/5$). En posant $x' = x+\epsilon$ et $y' = y+\epsilon$, on a alors $(x',y') \in A$ et $(x,y) < (x',y')$.

A n'a pas de plus grand élément. En effet, s'il en avait un, ce serait un élément maximal donc ce serait $(0,1)$; mais $(0,1)$ n'est pas un majorant de A puisque, par exemple, $(0,1) \not\leq (1/3,1/3)$ alors que $(1/3,1/3) \in A$.

Enfin, A a une borne supérieure : (1,1), comme cela découlait d'un exercice fait en TD.

Exercice 4. Soient (a,b) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple (q,r) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$ (condition qu'on peut remplacer par $0 \leq r \leq |b|-1$, puisque r est entier, ou encore par $r < |b|$ ou par $r \leq |b|-1$ puisqu'on a déjà indiqué que r était un entier naturel donc plus grand que 0)

Exercice 5. 1) Posons $z = e^{i\theta}$ et $S = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$. On a $S = \sum_{k=0}^n z^k$ et $z \neq 1$ puisque $\theta \in]0, 2\pi[$. Donc

$$S = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

Or $z^{n+1} - 1 = e^{i(n+1)\theta} - 1 = e^{i(n+1)\theta/2}(e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}) = e^{i(n+1)\theta/2} 2i \sin[(n+1)\theta/2]$. De même, $z - 1 = e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2} 2i \sin(\theta/2)$. On obtient donc :

$$S = \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{2i\sin[(n+1)\theta/2]}{2i\sin(\theta/2)} = e^{in\theta/2}\frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin(\theta/2)}$$

Or $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = Im(S)$. Donc

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \sin(n\theta/2)\frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin(\theta/2)}$$

2) Il y avait une erreur dans l'énoncé, qui pouvait être rectifier de deux manières différentes. Première manière : en remplaçant 2008 par 1004 uniquement dans l'expression (erronée) $2008 = 6 \times 167 + 2$. Deuxième manière : en remplaçant partout 2008 par 1004 (donc aussi dans les bornes de la somme). Peu importe ce que vous avez compris, si vous avez résolu correctement l'énoncé que vous avez compris, vous aurez les points. Je corrige ici l'énoncé obtenu en rectifiant l'énoncé de la première manière.

Posons $A = \sum_{k=0}^{2008} \sin(k\pi/3)$. En appliquant la formule, il vient :

$$A = \sin(2008\pi/6)\frac{\sin(2009\pi/6)}{\sin(\pi/6)}$$

Or, en posant $q = 167$, on a

$$\frac{2008\pi}{6} = 2\pi\frac{1004}{6} = 2\pi\left(q + \frac{2}{6}\right) = 2q\pi + \frac{2\pi}{3}.$$

Donc $\sin(2008\pi/6) = \sin(2\pi/3)$. De même, $2009\pi = 2q\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = 2q\pi + \frac{5\pi}{6}$, donc $\sin(2009\pi/6) = \sin(5\pi/6) = \sin(\pi/6)$. On a donc

$$A = \sin(2\pi/3)\frac{\sin(\pi/6)}{\sin(\pi/6)} = \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$$

Complément. La somme peut aussi se calculer directement ainsi : pour tout entier q, $\sum_{k=q}^{q+5} \sin(k\pi/3) = 0$ (car c'est la somme des parties imaginaires des racines sixièmes de l'unité), donc si p est un entier naturel multiple de 6 alors $\sum_{k=0}^{p-1} \sin(k\pi/3) = 0$. Or $2010 = 6 \times 335$ est multiple de 6, donc $\sum_{k=0}^{2009} \sin(k\pi/3) = 0$, donc $\sum_{k=0}^{2008} \sin(k\pi/3) = -\sin(2009\pi/3) = -\sin(-\pi/3 + 2010\pi/3)$. Or 2010 étant multiple de 6, $2010\pi/3$ est multiple de 2π, donc $\sin(-\pi/3 + 2010\pi/3) = \sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3)$. On obtient donc finalement $\sum_{k=0}^{2008} \sin(k\pi/3) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

Exercice 6. Il y avait une erreur dans l'énoncé : il fallait considérer les parties de $\mathbb{R}$ et non de $\mathbb{N}$ (cela était sans importance pour le 1), mais important pour que le 2) ait un sens.)

1) Il s'agit de montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive et symétrique. Soient A, B, C des parties de $\mathbb{R}$.

Reflexivité : L'application identité de A dans A est une bijection, donc $A\mathcal{R}A$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

Transitivité : Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$, alors il existe une bijection f de A vers B et une bijection g de B vers C. L'application $g \circ f$ est bien définie, de A vers C, et est bijective comme composée de bijections. Donc il existe une bijection de A vers C, donc $A\mathcal{R}C$. Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

Symétrie : Si $A\mathcal{R}B$ alors il existe une bijection de A vers B. Son application réciproque est une bijection de B vers A, donc il existe une bijection de B vers A, donc $B\mathcal{R}A$, donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

2) B_1, B_2 et B_4 sont en bijection avec $\mathbb{N}$ (c'est évident pour B_2 et du cours pour B_1 et B_4) et donc dans la classe d'équivalence de $\mathbb{N}$. En revanche, $B_3 = \mathbb{R}$ n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$ (c'est du cours aussi), donc n'est pas dans la classe d'équivalence de $\mathbb{N}$.

3) La classe d'équivalence de A est l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ à trois éléments.

Exercice 7. 1) Oui, par exemple l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1$

2) h est injective mais non surjective. Pour le montrer, on peut montrer que pour tout entier n, $h \circ h(n) = n + 2$, puis utiliser la méthode de la question 3a). On peut aussi raisonner ainsi :

- montrons que h est injective. Soient n et n' des entiers naturels tels que $h(n) = h(n')$. Remarquons que $h(n)$ et n ont une parité opposé (si n est pair, $h(n)$ est impair ; si n est impair, $h(n)$ est pair). Or comme $h(n) = h(n')$, $h(n)$ et $h(n')$ ont même parité, donc n et n' ont même parité (opposée à celle de $h(n)$ et $h(n')$). Donc soit n et n' sont tous les deux pairs, soit ils sont tous les deux impairs.

Dans le premier cas, $n+3=n'+3$ donc $n=n'$. Dans le second, $n-1=n'-1$ donc $n=n'$. Donc dans tous les cas $n=n'$. Donc h est injective.

- montrons que h n'est pas surjective. Pour ceci, il suffit de montrer qu'un élément n'a pas d'antécédent par h. On va montrer que 1 n'a pas d'antécédent. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair, $h(n) = n+3 \geq 3$, donc $h(n) \neq 1$. Si n est impair, $h(n)=n-1$ est pair, donc $h(n) \neq 1$. Donc dans tous les cas $h(n) \neq 1$. Donc 1 n'a pas d'antécédent par h. Donc h n'est pas surjective.

3)

3a) $f \circ f$ est évidemment injective (si $n+2=n'+2$ alors $n=n'$) et non surjective (0 et 1 n'ont pas d'antécédents). Or d'après le cours, si f et g sont des applications telle que $g \circ f$ existe : (i) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ; (ii) si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective. En appliquant ces résultat avec $g=f$, on obtient que f est injective d'après (i) et que f n'est pas surjective d'après la contraposée de (ii).

3b) On a $f(b) = f(f(a)) = f \circ f(a) = a+2$ par définition de f. De ce fait, $f(a+2) = f(f(b)) = f \circ f(b) = b+2$. Donc, comme on l'utilisera dans la question suivante, $f(a+2) = f(a)+2$.

3c) Soit $a \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel k, notons P_k la propriété : $f(a+2k) = f(a)+2k$. Montrons par récurrence que P_k est vraie pour tout entier naturel k.

- initialisation : P_0 est trivialement vraie.

- hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons P_k vraie. Remarquons que d'après le 3b), pour tout x dans $\mathbb{N}$, $f(x+2) = f(x)$. En appliquant ceci à $x = a+2k$, on obtient $f(a+2(k+1)) = f((a+2k)+2) = f(a+2k)+2$. Or par hypothèse de récurrence, $f(a+2k) = f(a)+2k$. Donc $f(a+2(k+1)) = f(a)+2k+2 = f(a)+2(k+1)$. Donc P_{k+1} est vraie.

Donc par récurrence P_k est vraie pour tout entier naturel k. Comme a avait été choisi quelconque, cela prouve le résultat voulu.

3d) Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 2k$. On a donc $f(n) = f(2k) = f(0+2k) = f(0)+2k$ d'après le 3c) appliqué à $a=0$. Donc $f(n) = p+2k$. Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 2k+1$. On a donc $f(n) = f(1+2k) = f(1)+2k$ d'après le 3c) appliqué à $a=1$. Donc $f(n) = q+2k = q+(2k+1)-1 = q+n-1$.

3e) Faisons une démonstration par l'absurde. On a $f(p) = f \circ f(0) = 2$. Or si p est pair, alors d'après 3d) $f(p) = p+p = 2p$, donc $2=2p$ donc $p=1$, ce qui contredit le fait que p est pair. Donc p est impair.

4) Soit f une telle application. Soit $p = f(0)$ et $q = f(1)$. D'après le 3e), p est impair, donc d'après le 3d), $f(p) = q+p-1$. Mais on a vu que $f(p) = 2$. Donc $p+q=3$. Comme p est impair, il y a donc seulement deux possibilité : soit ($p=1$ et $q=2$) ; soit ($p=3$ et $q=0$). Dans le premier cas, d'après 3d), on obtient $f=g$ où g est l'application donnée en exemple au 1), c'est à dire telle que $g(n) = n+1$ pour tout $n \in N$. Dans le second cas, toujours d'après 3d), on obtient l'application h du 2). Ceci montre qu'il n'y a pas d'autres applications solutions. Réciproquement, ces deux applications sont bien solutions (faites-le calcul). L'ensemble des applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \circ f(n) = n+2$, est donc l'ensemble $\{g, h\}$, où g et h sont les applications définies ci-dessus.