Dénombrement et nombres complexes

Exercice 1 Soient E et F des ensembles (finis ou infinis). Montrer qu'il existe une injection de E vers F si et seulement si il existe une surjection de F vers E .

Exercice 2 Avec trois chiffres distincts donnés différents de 0 combien de nombres distincts peut-on former ?

Exercice 3 (Tous TD) Calculer le coefficient de $x^2y^3z^5$ dans $(x + 2y + 3z)^{10}$

Exercice 4 (*) Dans un jeu de 32 cartes, on tire une main de 5 cartes. Quelle est le nombre de mains contenant la dame de coeur ? exactement une dame ? au moins une dame ?

Exercice 5 Soit n un entier naturel plus grand que 3. Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone convexe de n côtés (une diagonale d'un polygone relie deux sommets non consécutifs de celui-ci).

Exercice 6 Montrer que si a et b sont deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$, alors $\frac{a+b}{1+ab}$ est réel.

Exercice 7 (*) Que dit la formule de Moivre ? Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$, $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$, $\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$.

Exercice 8 (Tous TD) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n \cos(x + (2k\pi/n))$ et $\sum_{k=1}^n \sin(x + (2k\pi/n))$.

Exercice 9 (Tous TD) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Développer $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$; en déduire que $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\cos \theta$ et calculer ce polynôme pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 10 (Tous TD) Soit U^* le cercle unité de $\mathbb{C}$ privé du point -1 :

$$U^* = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq -1\}$$

On considère l'application :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto f(x) = \frac{1-ix}{1+ix}$$

- i) Calculer, pour tout réel x , le module de $f(x)$. L'application f est-elle surjective ? injective ? Peut-on avoir $f(x) = -1$?
- ii) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans U^* telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective.
- iii) On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur U^* par :

$$z \mathcal{R} t \text{ si et seulement si } g^{-1}(z) \leq g^{-1}(t)$$

$\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? transitive ? une relation d'ordre ?

Exercice 11 (*) Ecrire, sous forme d'une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, les transformations géométriques suivantes :

- a) rotation de centre $A(1+i)$, d'angle $-\pi/4$
- b) homothétie de centre $B(-2i)$, de rapport $1/3$
- c) symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 Soit f l'application de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$z \mapsto f(z) = \frac{\ln|z|}{z^2}$$

i) On pose $z = re^{it}$, avec $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer le module et l'argument de $z' = f(z)$. L'application f est-elle injective ?

ii) Soit R un réel strictement positif. On pose $E = \{z \in \mathbb{C}^*, |z| = R\}$. Déterminer l'image directe $f(E)$ de E par f . Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 13 Démontrer l'égalité du parallélogramme :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}, |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

Exercice 14 (Tous TD) Soient r_1 la rotation de centre $A(1-i)$, d'angle $\pi/2$ et r_2 la rotation de centre $B(1+i)$, d'angle $\pi/2$.

- a) Définir les transformations complexes correspondant à r_1 et r_2 .
- b) Calculer $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$ et les caractériser géométriquement.
- c) Calculer $r_1 \circ r_2 \circ r_1^{-1}$ et la caractériser géométriquement.

Exercice 15 Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2, z^3 soient alignés.

Exercice 16 Représenter géométriquement l'ensemble suivant : $\{z \in \mathbb{C}, |z - i| + |z + 1| = 2\}$

Exercice 17 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, f(z) = \frac{2}{\bar{z}}.$$

- Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^*, f \circ f(z) = z$.
- f est-elle bijective? Si oui, calculer f^{-1} .
- Soit R un réel strictement positif, et C le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$. Calculer $f(C)$.
- Quel est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, f(z) = z\}$?

Exercice 18 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, associe :

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}).$$

- Montrer que pour tout z réel, $f(z) = \cos(z)$.
- Soit z dans $\mathbb{C}$. Montrer que $f(z + 2\pi) = f(z)$, que $f(-z) = f(z)$, et que $f(2z) = 2(f(z))^2 - 1$.
- f est-elle injective?
- Calculer $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 19 (Tous TD) Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

- L'application f est-elle injective? surjective?
- Calculer l'image réciproque de $\{i\}$ par f .
- Déterminer l'image directe du cercle unité U par f .
- On note H le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du segment $[-1, 1]$, et on note D l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1\}$. Montrer que l'on peut définir l'application :

$$\begin{array}{ccc} g : D & \longrightarrow & H \\ z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

- Montrer que g est bijective. (On pourra remarquer que le produit des racines de l'équation $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ est 1).

Exercice 20 (*) Calculer les racines carrées de $-2 + 2\sqrt{3}i$, puis celles de $9i$.

Exercice 21 (Tous TD) Résoudre l'équation $z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$.

- Exprimer les racines z_1 et z_2 en fonction des nombres complexes $a = (\sqrt{3} + i)/2$ et $b = (-1 + i\sqrt{3})/2$.
- Déterminer le module et l'argument de ces racines.
En déduire les valeurs de $\cos(5\pi/12)$, $\sin(5\pi/12)$, $\cos(11\pi/12)$ et $\sin(11\pi/12)$.

Exercice 22 (*) Soit δ une racine carrée du nombre complexe z . Trouver les racines carrées de $-z, (1 + i)z$ et z^3 en fonction de δ .

Exercice 23 (Tous TD) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 24 (Tous TD) Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x + i)^n = (x - i)^n$$

Exercice 25 Donner un exemple de partie d'un ensemble ordonné qui n'a aucun élément maximal.

Exercice 26 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de E . Montrer que si A a un plus grand élément alors A a un et un seul élément maximal. Plus difficile : la réciproque est-elle vraie?