# Applications

(au strict minimum, les exercices précédés de $(*)$ et $(**)$ doivent avoir été faits à la maison avant les séances de TD qui seront indiquées par les chargés de TD).

$(*)$ **Exercice 1.** Soient $A = \{0,1,2\}$ et $B = \{0,1\}$. Enumérer les applications de $A$ dans $B$, puis les applications de $B$ dans $A$.

$(*)$ **Exercice 2.** Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par : pour tout réel $x$, $f(x) = x^2$. Déterminer :

a) $f([-1,1])$, $f([0,3[)$, $f(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R}_-)$ ; b) $f([-2,0] \cap [0,2])$ et $f([-2,0]) \cap f([0,2])$ (comparez !) ;

c) $f^{-1}([0,3[)$, $f^{-1}([-10,3[)$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$.

(Tous TD) **Exercice 3.** Soit l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par : pour tout réel $x$, $g(x) = \sin x$. Sans justifier, donner :

a) $g([0,2\pi])$, $g(\mathbb{R})$, $g([0,10[)$ et $g([0,\frac{\pi}{2}[)$ ; b) $g^{-1}([2,+\infty[)$, $g^{-1}(\mathbb{R})$, $g^{-1}([-1,1])$ et $g^{-1}([-1,1[)$.

$(*)$ **Exercice 4.** Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) $f : \{0,1,2\} \to \{1,8,-1,24\}$ telle que $f(0) = -1$, $f(1) = 24$, $f(2) = 1$.

2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$n \mapsto -n$

3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n+1$

4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n-1$

5) $f : \mathbb{N} \to \{-1,+1\}$ qui à tout $n$ de $\mathbb{N}$ associe 1 si $n$ est pair, et $-1$ si $n$ est impair.

$(*)$ **Exercice 5.** Pour chacune des applications 1), 2), 3) et 5) de l'exercice précédent, calculer : $f(\{2\})$, $f(\{0,2\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1,1\})$.

$(*)$ **Exercice 6.** Les applications suivantes sont elles-bien définies ? Si oui, sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$1)\ f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 2)\ f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 3)\ f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 4)\ f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 5)\ f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_- \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

**Exercice 7.** Même exercice pour les applications suivantes :

$$1)\ g_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 2)\ g_2 : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 3)\ g_3 : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 4)\ g_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

(Tous TD) **Exercice 8**. Soient $E$ et $F$ de parties de $E$. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $y$ un réel. Expliquer (informellement) comment l'on trouve à partir du graphe de $f$ les solutions dans $E$ de l'équation $f(x) = y$. Comment lit-on sur le graphe de $f$ que $f$ est injective ? surjective ? bijective ? (Attention : ceci a pour but de vous faire comprendre les notions d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité. Mais répondre lors d'un examen : "l'application $f$ est injective car son graphe a telle propriété", sans prouver rigoureusement que le graphe a cette propriété, ne vous vaudra pas tous les points.)

**Exercice 9.** Soit $f$ une application de $A$ vers $B$. Démontrer que $A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(\{y\})$.

(Tous TD) **Exercice 10.** Soit $f$ une application de $E$ vers $F$. Soient $A$ et $A'$ des parties de $E$. Soient $B$ et $B'$ des parties de $F$. Montrer que :

a) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ ; b) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ ;

c) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ ; d) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

Donner un exemple montrant que l'inclusion du b) peut être stricte.

(Tous TD) **Exercice 11.** Soit $f$ une application de $E$ vers $F$. Soient $A \subset E$, $B \subset F$. Montrer que $A \subset f(f^{-1}(A))$ et $B \subset f(f^{-1}(B))$. Donner des exemples montrant qu'il n'y a pas en général égalité.

**Exercice 12.** Soit $f$ une application de $E$ vers $F$ Démontrer les équivalences suivantes :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$$

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$$

**Exercice 13.** Soit $f$ une application de $E$ vers $F$ et $A$ une partie de $E$.

a) Démontrer qu'il n'y a en général pas d'inclusion entre $f(C_E(A))$ et $C_F(f(A))$.

b) Toutefois, démontrer : $f$ bijective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(C_E(A)) = C_F(f(A))$.

**Exercice 14.** *Fonction caractéristique.*

Soit $E$ un ensemble. A toute partie $A$ de $E$ on associe l'application $f_A$ de $E$ dans $\{0,1\}$ définie par $f_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 0$ sinon. L'application $f_A$ est appelée fonction caractéristique de $A$. Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$. Exprimer en fonction de $f_A$ et de $f_B$ les fonctions caractéristiques de $C_E(A)$, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \backslash B$.

(Tous TD) **Exercice 15.** L'application

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x} \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? (On pourra avec profit construire le tableau de variation de $g$ et utiliser des résultats d'analyse). Calculer $g^{-1}(\{-e\})$, $g^{-1}(\{1\})$, $g(\mathbb{R}_+)$ et $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

**Exercice 16.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications. On considère l'application

$$h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

a) Montrer que si $f$ ou $g$ est injective, alors $h$ est injective.

b) On suppose $f$ et $g$ surjectives. A-t-on forcément $h$ surjective ?

c) Montrer que si $h$ est surjective, alors $f$ et $g$ sont surjectives.

d) Donner un exemple où $h$ est injective mais ni $f$ ni $g$ ne sont injectives.

($**$) **Exercice 17.** Soient

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

a) l'application $h \circ f$ est-elle bien définie ?

b) Prouver que $f$ et $h$ sont bijectives, et déterminer leur réciproques.

($**$) **Exercice 18.** Soient $E$, $F$, $G$ des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.

a) Montrer que si $g \circ f$ est injective et $f$ est surjective, alors $g$ est injective.

b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et $g$ injective, alors $f$ est surjective.

($**$) **Exercice 19.** L'application

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n,p) & \mapsto & n+p \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ? bijective ? Déterminer $f^{-1}(\{3\})$.

**Exercice 20.** Soient $E, F, G, H$ des ensembles et $f$, $g$, $h$ des applications telles que : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$

Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors $f$, $g$ et $h$ sont bijectives.

**Exercice 21.** L'application

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? bijective ?

**Exercice 22.** (relativement difficile) Soit $E$ un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que $f$ est injective ou $f$ est surjective si et seulement si $f = Id_E$.

**Exercice 23.** (relativement difficile) Soit $E$ un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que $f$ est injective si et seulement si $f$ est surjective.