Ensembles, raisonnement, indices

(au strict minimum, les exercices précédés d'une étoile doivent avoir été faits à la maison ; les exercices précédés de "Tous TD" doivent être faits dans tous les groupes de TD)

(*) **Exercice 1** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$
- b) $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$

(*) **Exercice 2** (ensembles : définitions) Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 6, 2\}$ et $C = \{1, 3\}$. Calculer $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $C_A(B)$ et $B \setminus C$.

(*) **Exercice 3** (ensembles : définitions) Soient $A = \{3, 5\}$, et $B = \{2, 5, 9\}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

(*) **Exercice 4** (ensembles : définitions) Soit $E = \{a\}$ un ensemble à un élément. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

(Tous TD) **Exercice 5** (propriétés des ensembles) Soient A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A . Démontrer les propriétés suivantes : a) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; b) $C_A(C_A(X)) = X$; c) $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$; d) $X \subset Y \iff C_A(Y) \subset C_A(X)$

Exercice 6 (une rédaction confuse conduit à des erreurs) Que pensez-vous de la démonstration suivante ?

"Pour tout réel x , $(x - 2)(x - 1) \neq 0 \iff x \neq 2, x \neq 1$, or x ne peut pas être égal à la fois à 2 et à 1, donc pour tout réel x , $(x - 2)(x - 1)$ est non nul".

(*) **Exercice 7** (ensembles, équivalence) Soient A et B des ensembles. Montrer que $A \cap B = A \iff A \cup B = B$.

(Tous TD) **Exercice 8** (preuve par l'absurde) Montrer par l'absurde que si un réel x positif ou nul vérifie

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, x \leq y$$

alors $x = 0$.

(Tous TD) **Exercice 9** (preuve par contraposée) Montrer par contraposée que pour tout entier naturel x , si n^2 est pair alors n est pair.

(Tous TD) **Exercice 10** (preuve cyclique) Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E . Soient $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leur complémentaires dans E respectifs. Montrer que les 8 propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{llll} (i) A \subset B & (ii) A \cap B = A & (iii) \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} & (iv) A \cap \bar{B} = \emptyset \\ (v) \bar{A} \cup B = E & (vi) \bar{B} \subset \bar{A} & (vii) \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{B} & (viii) A \cup B = B \end{array}$$

(Tous TD) **Exercice 11** (indices : définitions) Pour tout entier relatif k , on pose $a_k = k^2$. Calculer les sommes suivantes :

$$\text{a) } \sum_{k=2}^4 a_k; \quad \text{b) } \sum_{k=4}^2 a_k; \quad \text{c) } \sum_{k=1}^3 a_{2k-5}; \quad \text{d) } \sum_{k=1}^3 k a_k; \quad \text{e) } \sum_{\{k \in \mathbb{N} | 2 \leq k^3 \leq 100\}} a_k; \quad \text{f) } \sum_{\{k \in \mathbb{N} | 1 \leq 3k \leq 10\}} a_{2k-5}$$

(Tous TD) **Exercice 12** (récurrences) Démontrer par récurrence les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

(*) **Exercice 13** (indices : définitions) Pour tout entier relatif k , on pose $A_k = [k, k + 10]$. Que valent les unions et intersections suivantes ?

$$\text{a) } \bigcup_{k=3}^9 A_k; \quad \text{b) } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k; \quad \text{c) } \bigcap_{k=3}^9 A_k; \quad \text{d) } \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

(Tous TD) **Exercice 14** (indices, union, intersection) Que valent les unions et intersections suivantes ?

$$\text{a) } \bigcup_{x \in \mathbb{R}} [\sin x, 1 + \sin x]; \quad \text{b) } \bigcup_{x \in [1, +\infty[} \left] \frac{1}{x}, x \right[; \quad \text{c) } \bigcap_{x \in [1, +\infty[} \left] \frac{1}{x}, x \right[; \quad \text{d) } \bigcap_{x \in [1, +\infty[} \left[\frac{1}{x}, x \right]$$

(Tous TD) **Exercice 15** (indices, propriétés de l'union et de l'intersection) Soient A un ensemble, I un ensemble d'indices et $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par I (c'est à dire, la donnée pour tout i dans I d'un ensemble B_i). Montrer que :

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \quad \text{et} \quad A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

Exercice 16 (ensembles) Soient A un ensemble et X, Y, Z des parties de A .

- a) Donner un exemple où : $X \cup Y = X \cup Z$ et $Y \neq Z$.
 b) Donner un exemple où : $X \cap Y = X \cap Z$ et $Y \neq Z$.
 c) Démontrer que

$$(X \cup Y = X \cup Z \quad \text{et} \quad X \cap Y = X \cap Z) \implies Y = Z.$$

Exercice 17 (ensembles, quantificateurs) On considère les ensembles

$$E = \left\{ x \in [0, 1], \exists n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1} \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1} \right\}$$

L'ensemble E a-t-il un, une infinité, ou aucun élément ? Même question pour l'ensemble F .

Exercice 18 Pour tout entier naturel p , on note $p\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers relatifs de la forme pn avec n dans $\mathbb{N}$.

- a) Montrer que pour tous entiers naturels p et q ,

$$p\mathbb{N} \subset q\mathbb{N} \Leftrightarrow p \in q\mathbb{N}$$

- b) Montrer que pour tous entiers naturels p et q ,

$$p\mathbb{N} = q\mathbb{N} \Leftrightarrow p = q$$

Exercice 19 Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E . Soit $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E . Montrer les propriétés suivantes :

$$\text{a) } (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \quad \text{b) } A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

Exercice 20 (Différence symétrique de deux parties.) Soit E un ensemble. Pour A et B des parties de E , on note $A \Delta B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Soient A, B et C des parties de E . Montrer que :

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ A \Delta \emptyset &= A, \quad A \Delta B = B \Delta A, \quad A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C \\ A \cap (B \Delta C) &= (A \cap B) \Delta (A \cap C) \end{aligned}$$

Exercice 21 Soit $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une famille de réels. On définit

$$A = \min_{1 \leq i \leq n} (\max_{1 \leq j \leq p} a_{ij}), \quad B = \max_{1 \leq j \leq p} (\min_{1 \leq i \leq n} a_{ij})$$

Montrer que $B \leq A$.

Exercice 22 (difficile) Soit $(A_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de parties d'un ensemble E .

$$\text{Comparer } \bigcap_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} A_{ij} \right) \quad \text{et} \quad \bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I} A_{ij} \right).$$

Exercice 23 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \implies n! \geq 2^n.$$