Contrôle continu d'algèbre

Durée 1h. Tous documents et calculatrices interdits.

Les exercices sont indépendants. Le barême indiqué est approximatif. Il sera fortement tenu compte de la rédaction.

Exercice 1 (environ 12 pts; si vous êtes bloqués, admettez le résultat et continuez).

On note j le complexe $j = e^{i2\pi/3}$. Soit $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = 2 + i(1-j) + j(z-2)$$

1a) (1,5 pt) Soient z et z' des complexes. Montrer que $f(z) - f(z') = j(z-z')$. En déduire que $|f(z) - f(z')| = |z - z'|$.

1b) (1 pt) On note z_0 le complexe $z_0 = 2 + i$. Calculer $f(z_0)$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) - z_0 = j(z - z_0)$.

1c) (2 pts) On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0 = Id_{\mathbb{C}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$. Ainsi, $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, etc. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f_n(z) - z_0 = j^n(z - z_0)$.

1d) (3,5 pts) Montrer que $f_3 = Id_{\mathbb{C}}$. En déduire que f est bijective et déterminer sa réciproque.

1e) (3 pts) Soit $A = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = 5\}$. Déterminer $f(A)$.

Exercice 2

a) (1 pt) Enoncer le théorème sur la division euclidenne dans $\mathbb{K}[X]$.

b) (1 pt) Donner la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 3 (les questions sont indépendantes les unes des autres)

a) (1,5 pt) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^5 + 2$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $P(z) = 1$.

b) (1, 5 pt) Soient A et B les polynômes à coefficient réels $A = 2X^4 + X^2 + 3$ et $B = X^2 + 1$. Faire explicitement la division euclidienne de A par B. Déterminez le quotient et le reste.

c) (2 pts) Déterminer l'ensemble des polynômes de degré 2 à coefficients réels tels que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 2$. (indice : utiliser la formule de Taylor)

d) (2 pts) Soit $A \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme $A = X^{121} - 4X^{119} + 3X - 5$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par $X - 2$.

Corrigé du contrôle continu du 4 décembre 2006

Exercice 1

1a) Soient $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$. On a $f(z) - f(z') = 2 + i(1-j) + j(z-2) - (2 + i(1-j) + j(z'-2)) = j(z-2) - j(z'-2) = j(z-z')$. On a donc $|f(z) - f(z')| = |j(z-z')| = |j||z-z'|$. Or $|j| = |e^{i2\pi/3}| = 1$ donc $|f(z) - f(z')| = |z-z'|$.

1b) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $f(z_0) = 2+i(1-j)+j((2+i)-2) = 2+i-ij+ji = 2+i = z_0$. Or d'après la première partie du 1a) avec $z' = z_0$, on a $f(z) - f(z_0) = j(z-z_0)$. Comme $f(z_0) = z_0$, on obtient donc $f(z) - z_0 = j(z-z_0)$.

1c) On procède par récurrence : soit $z \in \mathbb{C}$. Soit P_n la propriété $f_n(z) - z_0 = j^n(z-z_0)$. Pour $n = 0$, $f_0 = Id_{\mathbb{C}}$ donc $f_0(z) - z_0 = z - z_0$, donc P_0 est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie, c'est à dire $f_n(z) - z_0 = j^n(z-z_0)$. D'après la définition de f_{n+1} et le 1b) appliqué à $f_n(z)$, on a $f_{n+1}(z) - z_0 = f(f_n(z)) - z_0 = j(f_n(z) - z_0)$. Donc d'après P_n, $f_{n+1}(z) - z_0 = j.j^n(z-z_0) = j^{n+1}(z-z_0)$. Donc P_{n+1} est vraie. Donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1d) Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après 1c) avec $n = 3$, on a $f_3(z) - z_0 = j^3(z-z_0)$. Or $j^3 = (e^{i2\pi/3})^3 = e^{i2\pi} = 1$. Donc $f_3(z) - z_0 = z - z_0$ donc $f_3(z) = z$, et ce pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc $f_3 = Id_{\mathbb{C}}$. Posons $g = f_2 = f \circ f$. On a $f_3 = f \circ f \circ f = f \circ g = g \circ f$. Donc $f \circ g = g \circ f = Id_{\mathbb{C}}$. D'après le résultat du cours cité ci-dessous, avec $E = F = \mathbb{C}$, f est bijective et sa réciproque est g.

Résultat utilisé : Soient E et F des ensembles et $f : E \mapsto F$. S'il existe $g : F \mapsto E$ tel que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ alors f est bijective et sa réciproque est g.

1e) Montrons que $f(A) = A$ par double inclusion. Soit $z \in A$. On a $|z - z_0| = 5$. Or d'après 1c) et 1b) avec $z' = z_0$, $|f(z) - z_0| = |f(z) - f(z_0)| = |z - z_0|$. Donc $|f(z) - z_0| = 5$, donc $f(z) \in A$. Donc $A \subset f(A)$. Réciproquement, soit $z \in A$. Soit $z' = z_0 + (z-z_0)/j$. On a $|z' - z_0| = |(z-z_0)/j| = |z-z_0|/|j| = |z-z_0| = 5$, donc $z' \in A$. De plus, d'après 1c), on a $f(z') - z_0 = j(z'-z_0) = j(z-z_0)/j = z - z_0$ donc $f(z') = z$, donc $z \in f(A)$. Donc $A \subset f(A)$ et par double inclusion $f(A) = A$.

(Pour montrer $A \subset f(A)$ on peut aussi raisonner ainsi : soit $z \in A$. Puisque d'après le 1d), f est bijective, donc surjective, il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $f(z') = z$. D'après le 1a), on a $|z' - z_0| = |f(z') - z_0| = |z - z_0| = 5$ donc $z' \in A$. Donc $z \in f(A)$. Donc $f(A) \subset A$.)

Remarque : soit M le point d'affixe $2+i$. L'application f s'interprète géométriquement comme la rotation de centre M et d'angle $2\pi/3$. La fonction g du 1d) s'interprète comme la rotation de centre M et d'angle $4\pi/3$ ou, de manière équivalente, comme la rotation de centre M et d'angle $4\pi/3 - 2\pi = -2\pi/3$.

Exercice 2 : voir cours

Exercice 3

3a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a: $P(z) = 1$ ssi $z^5 + 2 = 1$ ssi $z^5 = -1$ ssi $z^5 = e^{i\pi}$. Donc d'après la formule sur les racines nièmes d'un nombre complexe,

$$P(z) = 1 \text{ ssi } z \in \left\{e^{i(\pi+2k\pi)/5}, k \in \{0,1,2,3,4\}\right\}$$

3b) On obtient d'abord $A = 2X^2B + (-X^2 + 3)$ puis $A = (2X^2 - 1)B + 4$. La division s'arrête là car le degré du polynôme constant égal à 4 est plus petit que le degré de B. Le quotient est $Q = (2X^2 - 1)$ et le reste $R = 4$ (polynôme constant égal à 4).

3c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2. Il existe des réels a, b, c tels que $P = aX^2 + bX + c$. De plus, d'après la formule de Taylor appliquée au point 1,

$$P = \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2$$

Donc si $P(1) = P'(1) = P''(1) = 2$, on a : $P = 2 + 2(X-1) + (X-1)^2 = 2 + 2X - 2 + X^2 - 2X + 1 = X^2 + 1$. Réciproquement, pour $P = X^2 + 1$, on a bien $P(1) = P'(1) = P''(1) = 2$. Il existe donc un unique polynôme P de degré 2 tel que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 2$: le polynôme $P = X^2 + 1$.

3d) Soit $B = X - 2$. $B \neq 0$, donc d'après le théorême sur la division euclidienne des polynômes, il existe un couple de polynôme (Q, R) à coefficients complexes tels que $A = BQ + R$ et $degR < degB$. Comme $degB = 1$, le polynôme R est un polynôme constant. De plus, $B(2) = 0$ donc $A(2) = B(2)Q(2) + R(2) = R(2)$ donc R est le polynôme constant égal à $A(2)$. Enfin, $A(2) = 2^{121} - 4(2^{119}) + 6 - 5 = 1$ car $4(2^{119}) = 2^2 2^{119} = 2^{121}$, donc R est le polynôme constant égal à 1.