Université Paris-Dauphine DUMI2E 1ère année, 13 novembre 2006

Partiel d'algèbre

Durée 2h. Tous documents et calculatrices interdits.

Les exercices sont indépendants. Le barême indiqué est approximatif. Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées. **ATTENTION : il faut tourner la page !**

Exercice 1 (environ 1 pt)

Donner un exemple d'une application qui n'est ni injective, ni surjective (on prouvera rapidement qu'elle n'est ni injective ni surjective).

Exercice 2 (environ 5 pt):

On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application qui à tout nombre complexe non nul associe :

$$f(z) = -\frac{1}{z^4}$$

2a) f est-elle injective ? surjective ?

2b) Soit $A = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 2\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1/16\}$. Montrer que $f(A) = B$.

2c) Soit z un nombre complexe tel que $f(z) = \bar{z}$. Montrer que $|z| = 1$.

2d) Déterminer tous les nombres complexes z tels que $f(z) = \bar{z}$.

Exercice 3 (environ 6 pt)

On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on note $Arg(z)$ l'unique argument de z appartenant à $[0, 2\pi[$. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{C}^*$ définie par : pour tout nombres complexes z et z',

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } |Arg(z)| \leq |Arg(z')|)$$

3a) En justifiant brièvement, dire si $1\,\mathcal{R}\,i$, si $i\,\mathcal{R}\,1$ et si $i\,\mathcal{R}\,(1+i)$.

3b) La relation $\mathcal{R}$ est-elle symétrique ?

3c) La relation $\mathcal{R}$ est-elle transitive ?

3d) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?

3e) $\mathbb{C}^*$ a-t-il un plus grand élément pour la relation $\mathcal{R}$? un plus petit élément ?

Exercice 4 (environ 11 pt)

Soit E un ensemble infini. Soit A ⊂ E. On suppose qu'il existe une application $f : E \to A$ injective. Soit $(B_n)_{n\in N}$ la suite de sous-ensembles de E définie par

$$\begin{cases} B_0 = C_E(A) \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = f(B_n) \end{cases}$$

Soit

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup ...$$

4a) Soit $x \in E$. Montrer que $C_E(A) \subset B$. En déduire que si $x \notin B$ alors $x \in A$.

4b) Montrer que $B_1 \subset A$

4c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n \subset A$

4d) Montrer que $f(B) \subset B$.

4e) Soit $g : E \to E$ l'application définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in B \\ g(x) = x & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

Montrer que $g(E) \subset A$.

4f) Soient x et y des éléments de E. Montrer que si $x \in B$ et $y \notin B$, alors $g(x) \neq g(y)$.

4g) Montrer que g est injective.

4h) Soit $y \in A \cap B$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y \in B_n$. En déduire que y a au moins un antécédent par g.

4i) Soit $y \in A \backslash B$. Montrer que y a au moins un antécédent par g.

4j) Déduire des deux questions précédentes que $A \subset g(E)$. En déduire que $g(E) = A$.

4k) Déduire des questions 4g) et 4j) qu'il existe une bijection de E dans A.