Matrices

1 Calculs élémentaires sur les matrices

Exercice 1.1 (∗) On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux lorsqu'ils existent.

Exercice 1.2 (∗) Comparer AB et BA pour les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.3 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{n,1}$ et $X = (x_1, \dots, x_n)$ une matrice de $M_{1,n}$. Vérifier que les deux produits UX et XU sont possibles et calculer les.

Exercice 1.4 (∗) Soit A une matrice de $M_{n,p}$.
a) Si I_n est la matrice unité d'ordre n, montrer que $I_nA = A$ puis que $AI_p = A$.
b) Soit E_{ij} la matrice élémentaire de M_n dont tous les coefficients valent 0, sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j, qui vaut 1. Calculer $E_{ij}A$. On note ici F_{ij} la matrice élémentaire de M_p définie de manière analogue. Calculer AF_{ij}.

Exercice 1.5 a) Déterminer deux matrices A et B de $M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Calculer AB et BA. A-t-on $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice 1.6 (Tous TD) **Puissance de matrice et formule du binôme :** Soit A une matrice de M_n. On définit les puissances de A par récurrence :

$$A^0 = I_n\ ,\ A^1 = A \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ \ A^{p+1} = A^pA = AA^p.$$

On dit que deux matrices A et B de M_n commutent si $AB = BA$. Montrer que si A et B commutent, la formule du binôme de Newton est vraie :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k} \ \text{ avec } \ C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

Exercice 1.7 (Tous TD) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = A - I_3$. Pour n entier naturel, calculer J^n, puis A^n.

Exercice 1.8 (Tous TD) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 1.9 (Tous TD) Soient A et B deux matrices de M_n. Effectuer les produits :

$$(A+B)^2 \ , \ (A-B)(A+B) \ , \ (A-B)^2 \ , \ (AB)^2 \text{ et } (I + A + \ldots + A^k)(I - A).$$

Exercice 1.10 Soient A et B deux matrices de M_n triangulaires inférieures. Montrer que leur somme et leur produit sont aussi triangulaires inférieures.

Exercice 1.11 (Tous TD) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de M_n. On appelle trace de A, et on note $tr(A)$ le nombre réel :

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Montrer que : $\forall A \in M_n$, $\forall B \in M_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \qquad tr(\lambda A) = \lambda tr(A), \qquad tr(AB) = tr(BA).$$

Exercice 1.12 Soient A et B deux matrices carrées réelles, de format $n \times n$, avec $tr(A) \neq -1$. Déterminer les matrices $X \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$X + (tr(X))A = B \ .$$

Exercice 1.13 (Tous TD)
1) Soit X une matrice colonne à coefficient réels. Calculer $X^T X$. Montrer que $X^T X = 0$ si et seulement si $X = 0$.
2) Soit A une matrice à coefficient réels et X une matrice colonne à coefficient réels telle que le produit AX existe. Montrer que $AX = 0$ si et seulement si $X^T A^T A X = 0$.
3) Montrer qu'ainsi énoncé ces résultats sont faux pour des matrices á coefficients complexes. Comment peut-on les géneraliser au cas des matrices á coefficients complexes ?

Exercice 1.14 a) Montrer que, pour toute matrice A de $M_{n,p}$, les produits $A(A^T)$ et $(A^T)A$ sont des matrices carrées symétriques. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AA^T et $A^T A$.
b) Montrer que toute matrice carrée B peut s'écrire de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique T. Déterminer S et T si $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Inverse de matrices

Exercice 2.1 ($*$) a) La somme de deux matrices inversibles est-elle toujours inversible ?
b) Montrer que si une matrice A de M_n est inversible, alors toutes les puissances de A sont inversibles.

Exercice 2.2 ($*$) Déterminer l'inverse (quand il existe) des matrices suivantes par la méthode du pivot :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.3 a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire que A n'est pas inversible. Calculer A^n pour n entier naturel.
b) Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice N telle que : $B = I + N$, puis calculer $(I - N)(I + N)$. En déduire que B est inversible et calculer son inverse, puis B^{100}.

Exercice 2.4 (Tous TD) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.
a) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
c) Déterminer en fonction de n et des termes initiaux les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par u_0 , v_0 et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 5u_n - 2v_n \end{cases}$$

Exercice 2.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $A^3 - 6A^2 + 12A$.
b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 2.6 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 + A + I = 0.$$

a) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = -A - I$.
b) Montrer que $A^3 = I$.
c) Calculer, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, A^p en fonction de A et I.

Exercice 2.7 (Tous TD) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 puis A^3.
b) A est-elle inversible ?
c) On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $(A+I)^{10}$.

3 Exercices de l'examen 2002

Exercice 3.1 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $ad - bc = 0$.
On note $s = a + d$. Soit B la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $A + B = sI_2$.

1) Calculer le produit matriciel AB.

2) En déduire que $A^2 = sA$, et calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la matrice A^n.

3) Calculer B^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 3.2 Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ non nulle (c'est-à-dire différente de la matrice nulle) et symétrique.

1) Montrer que A^2 est symétrique.

2) Exprimer les coefficients de A^2 en fonction de ceux de A.

3) Montrer que la trace de A^2 est strictement positive, puis en déduire que A^2 est non nulle.

4) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, A^k est non nulle.