Partiel d'algèbre 1

Durée 2h. Tous documents et calculatrices interdits. Barème approximatif. Il faut tourner la page.

Partie I (aucune justification n'est demandée) (5pts)

Exercice 1. (1,25 pt) Soit E un ensemble et $\leq$ une relation d'ordre sur E. Soit A une partie de E. Soit $x \in E$. On note $P(x)$ la proposition suivante :

$$(\forall a \in A, a \leq x) \text{ et } [\forall y \in E, (\forall a \in A, a \leq y) \Rightarrow x \leq y]$$

a) (0,75 pts) Donner la négation de $P(x)$: ....

....

b) (0,5pt) Si $P(x)$ est vraie, quel nom donne-t-on à x ? ....

....

Exercice 2. (0,75 pt). Sans justifier, donner l'ensemble des racines quatrièmes de $-16i$: ....

....

....

Exercice 3. (2 pts) On considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre produit. Soit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(0, 1)\}.$$

Donner un majorant de A : ....

A a-t-il des éléments maximaux ? oui non Si oui, les donner : ....

A a-t-il un plus grand élément ? oui non Si oui, le donner : ....

A a-t-il une borne supérieure ? oui non Si oui, la donner : ....

(attention : une réponse fausse à un oui-non donnera lieu à des points négatifs)

Exercice 4. (1pt) Enoncer précisément le théorème de division euclidienne sur $\mathbb{Z}$: ....

....

....

....

Partie II (sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées)

Exercice 5. (3 pts)

1) (2pts) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Donner une expression simple pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

2) (1pt) Application : calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2008} \sin(k\pi/3)$. On pourra utiliser le fait que $1004 = 6 \times 167 + 2$.

Exercice 6. (3pts) Sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ suivante : pour tous A et B dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A\mathcal{R}B$ si et seulement s'il existe une bijection de A vers B.

1) (2pts) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) (0,5pt) Sans justifier, dire lesquels des ensembles B_i suivants sont dans la classe d'équivalence de $\mathbb{N}$: $B_1 = \mathbb{Z}$, $B_2 = \{2^n, n \in \mathbb{N}\}$, $B_3 = \mathbb{R}$, $B_4 = \mathbb{Q}$.

3) (0,5pt) On pose $A = \{7, 10, 23\}$. Sans justifier, décrire la classe d'équivalence de A.

Exercice 7. (les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes). (9 pts).

1) (0,5pt) Existe-t-il une application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \circ g(n) = n + 2$?

2) (2pts) Soit $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par $h(n) = n + 3$ si n est pair et $h(n) = n - 1$ si n est impair. L'application h est-elle injective ? surjective ? bijective ?

3) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \circ f(n) = n + 2$. On note $p = f(0)$ et $q = f(1)$.

3a) (1pt) Montrer que f est injective mais non surjective.

3b) (0,5pt) Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b = f(a)$. Montrer que $f(b) = a + 2$ et $f(a + 2) = b + 2$.

3c) (1,5pt) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$ et pour tout a dans $\mathbb{N}$, $f(a + 2k) = f(a) + 2k$

3d) (0,5pt) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(n) = p + n$ si n est pair et que $f(n) = q + n - 1$ si n est impair.

3e) (1pt) Montrer que p est impair.

4) (2pts) Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \circ f(n) = n + 2$.