Polynômes

Exercice 1 ($*$) Effectuer les divisions euclidiennes de A par B pour les polynômes A et B suivants :
1) $A = X^3+6X^2+2X+5$, $B = 2X^2+4$; 2) $A = X^7+2X^5+7X^3+15X+2$, $B = X^3+2X$; 3) $A = X^3+6X^2+2X+5$, $B = 2X^2+4$; 4) $A = X^4+1$, $B = X^2+1$; 5) $A = 2X^3+17X^2-7X+2$, $B = 2X^5-1$.

Exercice 2 ($*$) Soit n un entier. Quand on introduit un polynôme en écrivant : soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, suppose-t-on implicitement que $deg(P) = n$? que $deg(P) \leq n$? rien du tout ? Même question quand on écrit : soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $a_n \neq 0$.

Exercice 3 (Tous TD) Soient A et B des polynômes à coefficient réels qu'on peut donc voir comme des polynômes à coefficient complexes particuliers. On suppose $B \neq 0$. Soient Q et R des polynômes à coefficients complexes tels que $A = BQ + R$. Les polynômes Q et R sont-ils forcément à coefficients réels ? Qu'en est-il si, de plus, $deg(R) < deg(B)$?

Exercice 4 ($*$) Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $P' = Q'$ si et seulement si $P - Q$ est un polynôme constant.

Exercice 5 ($*$) Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On considère la relation $\mathcal{R}$ suivante sur $\mathbb{K}[X]$: pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$,

$$P\,\mathcal{R}Q \Leftrightarrow B|P - Q$$

Montrer que $P\mathcal{R}Q$ si et seulement si P et Q ont même reste dans la division euclidienne par B. En déduire que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 6 ($*$) Soit B un polynôme non nul. Montrer que B est constant si et seulement si pour tout A dans $\mathbb{K}[X]$, $B|A$.

Exercice 7 (Tous TD) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer par récurrence que la formule du binôme de Newton est vraie dans $\mathbb{K}[X]$: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

Exercice 8 ($**$) Soient a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de a, $P(a)$ et $P'(a)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division de $P_n = X^n + X + b$ par $(X - a)$?

Exercice 9 Calculer le reste de la division euclidienne de A par B où $n \geq 2$, $A = X^n + X + 1$ et $B = (X-1)^2$? Pour p et q entiers tels que $p > q$, quel est le reste de la division de $X^p + X^q + 1$ par $X^2 + X$?

Exercice 10 Soit $A = X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$ et $B = X^3 - 2X + 1$. Peut-on déterminer a et b pour que B divise A ?

Exercice 11 Soit

$$P = \frac{X^n(4-2X)^n}{n!}$$

où n est un entier strictement positif.

a) Montrer que les $n-1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = 0$ et $x = 2$.
b) Ecrire la formule de Taylor pour P au point 0 et au point 2.
c) En déduire que toutes les dérivées de P prennent des valeurs entières pour $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 12 (Tous TD) Soit $n \geq 3$. Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $P(1) = 3$, $P'(1) = 4$, $P''(1) = 5$ et $P^{(k)}(1) = 3$ si $k \in \{3, .., n\}$. Un tel polynôme est-il unique ?

Exercice 13 Déterminer les polynômes de degré 3 de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par $Q = X + 1$ et dont les restes des divisions euclidiennes par $X + 2$, $X + 3$ et $X + 4$ sont égaux.

Exercice 14 ($**$) Factoriser le polynôme réel

$$P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!} .$$

Faire un raisonnement par récurrence.

Exercice 15 (Tous TD) Montrer qu'un polynôme réel de degré 3 admettant une racine double dans $\mathbb{C}[X]$ a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16 Soient p et q deux réels fixés et $A \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme $A = X^3 + pX + q$. Montrer que A admet au moins une racine réelle. Déterminer en fonction de (p, q) le nombre de racines réelles de A.

Exercice 17 Soient n un entier supérieur à 3, et P un polynôme de degré n à coefficients réels tel que $P(0) = 1$ et $P'(1) = 0$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ + 1$.

b) Montrer que $Q(1) + Q'(1) = 0$.

c) Montrer que $Q(X) = (X - 2)Q'(1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{Q^{(k)}(1)}{k!}(X - 1)^k$.

d) En déduire qu'il existe des réels uniques a_1,...,a_{n-1} tels que :

$$P = 1 + a_1 X(X - 2) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_k}{k!} X(X - 1)^k.$$

Exercice 18 (Tous TD) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivant :
1) $X^4 + 2X^3 - X - 2$; 2) $X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$; 3) $X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1$; 4) $X^{2n} - 1$;
5) $X^4 + X^2 + 1$; 6) $X^8 + X^4 + 1$; 7) $X^4 - 2X^2 \cos(2a) + 1$, où $a \in \mathbb{R}$; 8) $17X^2 - 34X + 17$

Exercice 19 (Tous TD) Déterminer le degré du polynôme $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$. Montrer que P est divisible par $X - j$ où $j = e^{2i\pi/3}$. Déterminer deux racines réelles entières de P en précisant les ordres de multiplicité. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20 ($**$) Soit $P = X^3 - 3X + 1$ et soient a, b, c les trois racines de P dans $\mathbb{C}[X]$. On ne cherchera pas à calculer ces racines. Montrer que a, b et c sont distinctes. Calculer $A = a + b + c$, $B = ab + ac + bc$ et $C = abc$.

Exercice 21 En développant de deux façons différentes le polynôme

$$P = (X + 1)^{(p+q)} = (X + 1)^p (X + 1)^q \ ,$$

montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \forall q \geq n$,

$$C_{p+q}^n = \sum_{k=0}^{n} C_p^k C_q^{n-k} \ .$$

(Cette égalité est connue sous le nom d'égalité de Van der Monde.)

Exercice 22 Quel est l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine du polynôme $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$?

Exercice 23 (difficile) Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X + 2) + P(X^2) = 0$. (On montrera que si α est racine de P, alors α^2 est racine de P, puis que la seule racine possible est 1.)

Exercice 24 Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme à coefficients complexes $P = X^4 + aX^3 + b$ admette une racine multiple.

Exercice 25 (Tous TD) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], deg(P) \leq n\}$. Soient P_0, P_1,...,P_n dans $\mathbb{K}[X]$ tels que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $deg(P_k) = k$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Si $n \geq 1$, montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $P - \lambda_n P_n \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. En déduire qu'il existe des scalaires λ_0,...,λ_n tels que $P = \lambda_0 P_0 + ... + \lambda_n P_n$. Montrer que cette écriture est unique (si des scalaires μ_0,...,μ_n vérifient $P = \mu_0 P_0 + ... + \mu_n P_n$ alors $\mu_k = \lambda_k$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$).

Exercice 26 a) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^3 - 3X^2 + 4$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}[X], \qquad P \ \mathcal{R} \ Q \Longleftrightarrow X^3 - 3X^2 + 4 | P - Q.$$

b) Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que :

$$P \ \mathcal{R} \ Q \Longleftrightarrow \ P(2) = Q(2), P'(2) = Q'(2) \text{ et } P(-1) = Q(-1).$$

c) Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que l'on a $P \ \mathcal{R} \ Q$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $X^3 - 3X^2 + 4$ est égal au reste de la division euclidienne de Q par $X^3 - 3X^2 + 4$.

d) $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}[X]$?

e) Soient P, Q, U, V des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P \ \mathcal{R} \ Q$ et $U \ \mathcal{R} \ V$. Montrer que $PU \ \mathcal{R} \ QV$.