UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE DUMI2E 1ère année, 13 novembre 2007

Partiel d'algèbre 1

Durée 2h. Tous documents et calculatrices interdits. Il faut tourner la page.

Les exercices sont indépendants. Le barême indiqué est approximatif. Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 (2 pts). Soit E un ensemble. Sans justifier, dire si les propositions suivantes sont vraies pour n'importe quelles applications $f : E \to E$ et $g : E \to E$. (Pas de points négatifs, répondre sur la copie normale et non sur cette feuille).

1) Si $g \circ f$ est injective alors g est injective.
2) Si f est surjective et g est surjective alors $g \circ f$ est surjective.
3) Si f est surjective et g est surjective alors $f \circ g$ est surjective.
4) Si $g \circ f = Id_E$ alors f est bijective.
5) Si f est injective et g est surjective, alors $g \circ f$ est surjective.

Exercice 2 (2pts)

Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Soient A et B des parties de E. A-t'on forcément $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$? Si oui, le démontrer. Sinon, donner un contre-exemple.

Exercice 3 (5,5 pts)

Soit $E = [0, 2\pi[$. On définit sur E la relation $\mathcal{R}$ par, pour tous x et y dans E :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\cos x \leq \cos y \text{ et } \sin x \leq \sin y)$$

1) (1 pt) Sans justifier, dire si $0\,\mathcal{R}\,(\frac{\pi}{2})$, si $(\frac{\pi}{3})\,\mathcal{R}\,\pi$ et si $\pi\,\mathcal{R}\,(\frac{\pi}{3})$.

2) (1pt) Donner la définition précise de "$\mathcal{R}$ est symétrique", de "$\mathcal{R}$ est totale" et de "$\mathcal{R}$ est antisymétrique".

3) (0,5pt) $\mathcal{R}$ est-elle symétrique ? Justifier.

4) (1pt) On admet que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre totale ?

Dans la question suivante, quand on parle de majorant et de plus grand élément, on entend : au sens de la relation d'ordre $\mathcal{R}$.

5) (2pts) Soit $A = [0, \pi/2]$. Montrer que A n'admet pas de majorant. A admet-il un plus grand élément ? A admet-il un minorant ?

Exercice 4 (8 pts)

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par, pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$f(z) = z^3$$

1) (1pt) Donner sans justifier l'ensemble des complexes z tels que $f(z) = 1$ et l'ensemble des complexes z tels que $f(z) = -2$.

2) (0,5pt) f est-elle injective ?

3) (1pt) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $f(z) = iz$.

4) (1pt) Soit a, b, λ et μ des réels, avec $a \leq b$ et $\lambda > 0$. Soit $B_1 = \{e^{i(\lambda\theta+\mu)}, \theta \in [a, b]\}$ et $B_2 = \{e^{i\theta'}, \theta' \in [\lambda a + \mu, \lambda b + \mu]\}$. Démontrer soigneusement que $B_1 = B_2$.

5) (1,5pt) Soit $A = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, \frac{\pi}{3}]\}$. Déterminer $f(A)$. Sans justifier, dire lesquels des complexes 1, $e^{i(4\pi/3)}$, i et $e^{i(15\pi/6)}$ sont dans $f(A)$?

6) (1pt) Soit $z = \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{8}}{3}$. Montrer que $z \in f(A)$.

7) (2pts) Déterminer $f^{-1}(f(A))$.

Exercice 5 (3pts)

Soit E un ensemble. Soit $f : E \to E$ et $g : E \to E$ des applications. On suppose que $f \circ g \circ f = Id_E$. Montrer que g est bijective.