Quelques rappels sur les fonctions sinus et cosinus

1. Définition géométrique

En deuxième année, on donnera une définition précise de l'exponentielle complexe et on définira proprement les fonctions cosinus et sinus comme les parties réelles et imaginaires, respectivement, de l'exponentielle complexe. Pour l'instant, nous nous contenterons de la définition géométrique suivante : considérons le plan $\mathbb{R}^2$, muni du repère orthonormé classique $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout réel θ, le point M_θ de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ est le point du cercle de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est de θ radian.

On peut bien sûr donner d'autres définitions géométriques équivalentes, par exemple à partir des relations entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

Le graphe des fonctions sinus et cosinus est supposé connu.

2. Premières propriétés

Les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui prennent leurs valeurs dans $[-1, 1]$. Ces fonctions sont 2π-périodique. Cela signifie que pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Un raisonnement par récurrence montre que pour tout réel x et pour tout entier relatif k, on a : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos x$, et la fonction sinus est impaire $\sin(-x) = -\sin x$. Enfin, pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

3. Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
e^{ix}	1	$\sqrt{3}/2 + i/2$	$(1+i)\sqrt{2}/2$	$1/2 + i\sqrt{3}/2$	i	-1

4. Formules d'addition.

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

On a en particulier :
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

5. Autres identités utiles (certaines de ses identités ont déjà été signalées plus haut).

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cos(x+\pi/2) = -\sin x$	$\sin(x+\pi/2) = \cos x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(x+\pi) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(x+\pi) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$

Je vous encourage à vérifier en faisant un dessin que les formules ci-dessus sont “raisonnables". Cela n'en constituera pas une preuve, mais peut vous aider à les retrouver. D'autre part, les formules ci-dessus, ainsi que les formules d'addition, permettent de trouver de nombreuses valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus. Par exemple, la valeur de $\cos(2\pi/3)$ se déduit de la valeur de $\cos(\pi/3)$ et de la formule $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

6. Dérivées

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables et l'on a, pour tout x dans $\mathbb{R}$: $\sin' x = \sin(x+\pi/2) = \cos x$ et $\cos' x = \cos(x+\pi/2) = -\sin x$. En 0, la dérivée du sinus vaut 1 et la dérivée du cosinus vaut 0. Du fait que la dérivée du sinus soit le cosinus et la dérivée du cosinus l'opposé du sinus, on déduit que les fonctions sinus et cosinus sont indéfiniment dérivables.

Pour se rappeler si c'est la dérivée du cosinus qui est égale à moins sinus ou l'inverse, un moyen simple est de remarquer qu'en 0 le cosinus vaut 1 et le sinus a une dérivée positive. C'est donc qu'on a $\sin' = \cos$, et que c'est dans la dérivée du cosinus qu'il y a un moins.

7. Autres formules : pour la formule de Moivre, la formule d'Euler et d'autres formules sur les complexes, voir votre formulaire de terminale, le cours, et quand il vous aura été distribué, le polycopié “Notes de cours".