Applications, relations, ensembles finis et infinis

(au strict minimum, les exercices précédés de ($*$) ou ($**$) doivent avoir été préparés avant les séances de TD indiquées par les chargés de TD).

($*$) **Exercice 1.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone. Montrer que f est injective. Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective mais non monotone.

($*$) **Exercice 2.** Sans justifier, pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective, ni injective ni surjective.

$$1)\ f_1 : \begin{array}{rl} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin x \end{array} \qquad 2)\ f_2 : \begin{array}{rl} \mathbb{R} & \to [-1,1] \\ x & \mapsto \sin x \end{array} \qquad 3)\ f_3 : \begin{array}{rl} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sin x \end{array} \qquad 4)\ f_4 : \begin{array}{rl} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \to [-1,1] \\ x & \mapsto \sin x \end{array}$$

Exercice 3. Sans justifier, pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective, ni injective ni surjective.

$$1)\ g_1 : \begin{array}{rl} [0,\pi] & \to [-1,1] \\ x & \mapsto \cos x \end{array} \qquad 2)\ g_2 : \begin{array}{rl} [0,\frac{\pi}{2}] & \to [-1,1] \\ x & \mapsto \cos x \end{array} \qquad 3)\ g_3 : \begin{array}{rl}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \tan x \end{array} \qquad 4)\ g_4 : \begin{array}{rl}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \tan x \end{array}$$

Exercice 4.

a) Existe-t-il une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement décroissante ?
b) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective mais non strictement croissante.
c) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ involutive ($f \circ f = Id_{\mathbb{N}}$) mais différente de l'identité.
d) (relativement difficile) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective. Montrer que $f(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

($*$) **Exercice 5.** (relations) On considère la relation $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tous réels x et y, $x\mathcal{R}y$ ssi $x + y \leq 10$. Cette relation est-elle reflexive ? transitive ? symétrique ? antisymétrique ? totale ? Est-ce une relation d'équivalence ? Est-ce une relation d'ordre ?

($*$) **Exercice 6.** (équivalence) Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par : pour tous x et y dans E, $x\mathcal{R}y$ ssi $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(Tous TD) **Exercice 7.** (équivalence) Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence (on pourra utiliser l'exercice précédent). Préciser les classes d'équivalence.

a) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff \cos x = \cos y$;
b) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff (\cos x = \cos y$ et $\sin x = \sin y)$;
c) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff E(x) = E(y)$, où $E(x)$ dénote la partie entière de x ;
d) sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \iff pq' = p'q$;

(Tous TD) **Exercice 8.** (équivalence) On considère une partition $\mathcal{P}$ d'un ensemble E, c'est-à-dire une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E telle que :

$$E = \cup_{i\in I} A_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

On définit alors la relation $\mathcal{R}$ sur E par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in I, (x \in A_i$ et $y \in A_i)$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles en sont les classes d'équivalence ?

(Tous TD) **Exercice 9.** (équivalence) *Notation : si n et p sont des entiers relatifs, on dit que n divise p, et on note $n|p$, s'il existe un entier relatif k tels que $p = kn$. Par exemple,* 6 *divise* 12 *et* 30*, mais ne divise pas* 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par : pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow n|p - q$$

(on dit alors que p est congru à q modulo n). Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que $p\mathcal{R}q$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de p par n est le même que le reste de la division euclidienne de q par n. Quelles sont les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$?

Exercice 10. (relations) Soit E un ensemble. Déterminer toutes les relations sur E qui sont à la fois des relations d'équivalence et des relations d'ordre.

Exercice 11. (ordre) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ (muni de la relation d'ordre usuelle) admettant chacune une borne supérieure.

i) Montrer que $A \cup B$ a une borne supérieure et que :

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

ii) On définit

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}, \exists (a, b) \in A \times B, x = a + b\}$$

Montrer que $A + B$ a une borne supérieure et que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

(Tous TD) **Exercice 12.** (ordre) On munit $\mathbb{R}^2$ des deux relations binaires :

$$(x, y)\mathcal{R}_1(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y' \text{ (ordre produit)}$$
$$(x, y)\mathcal{R}_2(x', y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \text{ (ordre lexicographique)}$$

On admet que ce sont des relations d'ordre.

i) Soit (a, b) donné dans $\mathbb{R}^2$. Identifier et représenter les ensembles :

$$X_{ab} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}_1(a, b)\}$$
$$Y_{ab} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}_2(a, b)\}$$

ii) Soit $A = \{(-10, 3), (0, 0), (1, -1), (3, 1), (1, 1), (7, 12), (-20, 20)\}$.

a) Pour l'ordre produit : classer les éléments de A (on pourra faire une représentation "en treillis") ; quels sont les éléments maximaux de A ? les éléments minimaux ? A a-t-il un plus grand élément ? une borne supérieure ? un plus petit élément ? une borne inférieure ?

b) Même questions pour l'ordre lexicographique.

iii) Montrer que dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre produit, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Est-ce vrai pour l'ordre lexicographique ? (on pourra considérer la partie $B = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$).

($**$) **Exercice 13.** (ordre) On admet que l'inclusion est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. Soit

$$A = \{[0, 1], [3, 10], \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, \{4, 7\}, \mathbb{N}\}\,.$$

Ordonner les parties de A suivant la relation d'inclusion. Déterminer l'ensemble des minorants (resp. majorants) de A. Quels sont les éléments maximaux de A ? les éléments minimaux ? L'ensemble A a-t-il une borne inférieure ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? un plus grand élément ?

($**$) **Exercice 14.** (réindexation d'une somme) : Soient x un réel et n un entier naturel. Calculer la somme $\sum_{k=2}^{n+2} x^{n+2}$.

(Tous TD) **Exercice 15.** Montrer que si un ensemble E a n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments.

Exercice 16. (préordre) Soit E un ensemble qui a au moins deux éléments. Sur l'ensemble des parties de E on définit la relation $\mathcal{R}$ par : pour tous A et B dans $\mathcal{P}(E)$, $A\mathcal{R}B$ si et seulement s'il existe une injection de A vers B. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation de préordre.

Exercice 17. Soit E un ensemble fini ou infini. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$ (indication : soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. Considérer l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.)

($**$) **Exercice 18.** (ensembles infinis) : on note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$$

est bijective.

(Tous TD) **Exercice 19.** Exercice (ensembles infinis) : soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application donnée par $f(n) = -n/2$ si n est pair, et $g(n) = (n + 1)/2$ si n est impair. Montrer que l'application g est bijective.

(Tous TD) **Exercice 20.** Exercice (ensembles infinis) : en admettant le résultat des deux exercices précédents, déterminer une bijection entre $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.