UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE DUMI2E 1ère année, 8 décembre 2008

Contrôle continu d'algèbre 1

Durée 1h. Tous documents et appareils électroniques interdits. Barème approximatif.

Partie I : aucune justification n'est demandée.

Exercice 1. (2pts) Enoncer précisément le théorème de division euclidienne sur $\mathbb{Z}$, puis énoncer précisément le théorème de division euclidienne sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2. (3pts) On considère les matrices à coefficients réels suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Parmi les produits suivants : AA, BB, CC, AB, AC, dire ceux qui sont bien définis et les calculer.

Partie II : sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 3. (7pts)

Soient $A = 3X^{2000} - 5X^{1000} + 2X^{12} + 2X^{10} - 2X^2$ et $B = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

1) (3pts) Factoriser B dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

2) (1pts) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et a, b, c, d des complexes distincts. Soit R le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$. Montrer que pour tout z dans $\{a, b, c, d\}$, $R(z) = P(z)$.

3) (3pts) Déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B.

Exercice 4. (9pts)

Soient f, g, h les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ données par, pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$f(z) = i - iz, \qquad g(z) = i\sqrt{3} + 3iz - 3z^2 - iz^3, \qquad h(z) = -1 + i\sqrt{3} + z^3.$$

1) (1,5pts) Montrer que f est bijective et calculer son application réciproque.

2) (2pts) h est-elle injective ? surjective ?

3) (2,5pts) Déterminer l'image réciproque par h de $\{0\}$.

4) On admet que $h = g \circ f$.

a) (1pt) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $g(z) = 0 \Leftrightarrow h(1 + iz) = 0$.

b) (2pts) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = i\sqrt{3} + 3iX - 3X^2 - iX^3$.

Corrigé du contrôle continu

Exercice 1. Sur $\mathbb{Z}$: Soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple (q,r) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

Sur $\mathbb{C}[X]$: Soient A et B deux polynômes à coefficients complexes, avec B non nul. Il existe un unique couple (Q,R) dans $\mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $deg(R) < deg(B)$.

Exercice 2. Les produits bien définis sont BB et AC. On a

$$BB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

1) Soit $P = (X-1)B$. On a $P = X^5 - 1$. Le polynôme P a cinq racines distinctes : les racines cinquième de l'unité. Comme $degP = 5$, ces racines sont nécessairement des racines simples. On a donc

$$P = (X-1)(X - e^{i2\pi/5})(X - e^{i4\pi/5})(X - e^{i6\pi/5})(X - e^{i8\pi/5})$$

Comme on a aussi $P = (X-1)B$, que $X - 1$ est non nul, et qu'on peut simplifier par un polynôme non nul, on en déduit

$$B = (X - e^{i2\pi/5})(X - e^{i4\pi/5})(X - e^{i6\pi/5})(X - e^{i8\pi/5}).$$

Ceci est la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$. En notant que $e^{i6\pi/5} = e^{-i4\pi/5}$, que $e^{i8\pi/5} = e^{-i2\pi/5}$ et en regroupant les racines avec leurs conjugués, on obtient :

$$B = (X - e^{i2\pi/5})(X - e^{-i2\pi/5})(X - e^{i4\pi/5})(X - e^{-i4\pi/5}) = (X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1)(X^2 - 2\cos(4\pi/5)X + 1).$$

Ceci est la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Posons $C = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$. Soit R le reste dans la division euclidienne de P par C. Il existe un polynôme Q tel que $P = CQ + R$. Si $z \in \{a,b,c,d\}$, en prenant la valeur en z, on obtient $P(z) = 0 \times Q(z) + R(z) = R(z)$.

3) Soit z est une racine de B. D'après le 1), $z^5 = 1$, donc $z^{2000} = z^{1000} = z^{10} = 1$ et $z^{12} = z^{10}z^2 = z^2$. On a donc $A(z) = 3 - 5 + 2z^2 + 2 - 2z^2 = 0$. Les racines de B sont donc racines de A. Notons a,b,c,d les 4 racines complexes distinctes de B. On peut raisonner de plusieurs façons :

Méthode 1 : d'après 1), on a $B = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$. Soit R le reste dans la division euclidienne de A par B. Comme B est de degré 4, le degré de R est au plus 3. De plus, d'après 2) utilisé avec $P = A$, pour tout $z \in \{a,b,c,d\}$, $R(z) = P(z)$, donc $R(z) = 0$. Comme les racines a, b, c, d sont distinctes, R a au moins 4 racines distinctes. Mais un polynôme de degré au plus 3 qui a 4 racines distinctes est forcément nul. Donc $R = 0$.

Méthode 2 : puisque a, b, c, d sont des racines distinctes de A, d'après le théorème de décomposition des polynômes à coefficients complexes en produits de polynôme de degré 1, A peut s'écrire sous la forme $A = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)Q = BQ$ (où Q est le polynôme obtenu en regroupant les termes qui restent dans la décomposition de A une fois qu'on a mis $(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$ en facteur). Donc B divise Q. Donc le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

Exercice 4.

1) Soit $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout complexe z, $\phi(z) = 1 + iz$. Pour tout complexe z, $\phi \circ f(z) = 1 + i(i - iz) = z$ et $f \circ \phi(z) = i - i(1 + iz) = z$, donc f est bijective et $f^{-1} = \phi$.

2) $h(z)$ ne dépend que de z^3. De ce fait $h(j) = h(1)$. Or $j \neq 1$ donc h n'est pas injective. En revanche, h est surjective. En effet, soit z' un complexe. On a $h(z) = z'$ si et seulement si z est racine du polynôme $A = -z' + [-1 + i\sqrt{3} + X^3]$. Or d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, A a au moins une racine dans $\mathbb{C}$, donc z' a au moins un antécédent, donc h est surjective.

3) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z \in h^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow h(z) = 0 \Leftrightarrow -1 + i\sqrt{3} + z^3 = 0 \Leftrightarrow z^3 = (1 - i\sqrt{3}) = 2e^{-i\pi/3}$. Donc

$$h^{-1}(\{0\}) = \{2^{1/3} e^{-i\pi/9} e^{i2k\pi/3}, k \in \{0, 1, 2\}\}.$$

4a) On a $g = g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f^{-1}$, or $f^{-1}(z) = 1 + iz$ d'après 1), donc $g(z) = 0$ si et seulement si $h(1 + iz) = 0$.

4b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Le complexe z est racine de P si et seulement si $g(z) = 0$, donc ssi $h(1 + iz) = 0$, donc ssi $1 + iz \in \{2^{1/3} e^{-i\pi/9} e^{i2k\pi/3}, k \in \{0, 1, 2\}\}$, donc ssi

$$z \in \{-i(2^{1/3} e^{-i\pi/9} e^{i2k\pi/3} - 1), k \in \{0, 1, 2\}\} = \{(2^{1/3} e^{-i11\pi/18} e^{i2k\pi/3} + i), k \in \{0, 1, 2\}\}.$$

Posons $z_k = 2^{1/3} e^{-i11\pi/18} e^{i2kpi/3} + i$, pour $k \in \{0, 1, 2\}$. On a montré que les racines de P étaient z_0, z_1 et z_2, et ces trois racines sont distinctes. Comme P est de degré 3, ces racines sont simples, donc $P = -i(X - z_0)(X - z_1)(X - z_2)$, où z_k est donnée par la formule précédente (certes peu enthousiasmante).