Systèmes linéaires

Exercice 1 Déterminer le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$1) \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{array} \right. \qquad 3) \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 10+2i \\ 2x_1 & + & (4+2i)x_2 & = & 6+2i \end{array} \right.$$

Exercice 2 Déterminer en fonction de la valeur des paramètres a et b le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$1) \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & b \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2ax_1 & + & ax_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & b \end{array} \right.$$

Exercice 3 Un système linéaire peut-il avoir exactement trois solutions ? Pourquoi ?

Exercice 4 Un système linéaire de n équations à n inconnues a-t-il toujours exactement une solution ? au moins une solution ? au plus une solution ?

Exercice 5 a) Considérons un système linéaire de 7 équations à 5 inconnues dont le rang est 4. Ce système a-t-il nécéssairement au moins une solution ? au plus une solution ? Ce système peut-il avoir une solution unique ?

b) Mêmes questions pour un système de 7 équations à 5 inconnues de rang 5

c) Mêmes questions pour un système de 5 équations à 7 inconnues de rang 4, puis pour un système de 5 équations à 7 inconnues de rang 5.

Exercice 6 Résoudre les systèmes linéaires figurant dans le polycopié sur les systèmes linéaires (i.e. pour vous entraîner, résoudre vous même les systèmes du polycopié, et ne vérifier en regardant les solutions qu'à la fin).

Exercice 7 Résoudre les systèmes suivants (pour les deux derniers, résoudre en fonction de la valeur des paramètres réels a, b et m).

$$1) \left\{ \begin{array}{cccccc} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +z & = & 4 \\ -2x & +y & -2z & = & -4 \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{cccccc} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +2z & = & 4 \\ -2x & +y & -z & = & -3 \end{array} \right. \qquad 3) \left\{ \begin{array}{cccccc} x & -2y & +3z & -4t & = & 4 \\ & y & -z & +t & = & -3 \\ x & +3y & & -3t & = & 1 \\ x & +2y & +z & -4t & = & 4 \end{array} \right.$$

$$4) \left\{ \begin{array}{cccl} x & +y & +2z & = 1 \\ x & +2y & +z & = 2 \\ 3x & +4y & +5z & = a \\ & y & +3z & = b \end{array} \right. \qquad 5) \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +(2m-1)z & = & 1 \\ mx & +y & +z & = & -1 \\ x & +my & +z & = & 3(m+1) \end{array} \right.$$

Exercice 8 On considère des matrices à coefficients réels. Soit A une matrice $n \times p$. On appelle noyau de A l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ telles que $AX = 0$. On appelle image de A l'ensemble des matrices colonnes $B \in \mathcal{M}_{n,1}$ telles que le système linéaire $AX = B$ ait au moins une solution. Déterminer le noyau et l'image des matrices suivantes. A chaque fois, calculer la somme du nombre de "degrés de liberté" du noyau et de l'image et comparer avec le nombre de colonnes de A. Que constatez-vous ?

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 6)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 7)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 Pour les matrices carrées A de l'exercice précédent (donc toutes sauf la 7)), déterminer les réels λ tels que le système linéaire $AX = \lambda X$ ait (au moins) une solution X non nulle. Pour chacune de ces valeurs de λ, résoudre le système $AX = \lambda X$.