Contrôle continu d'algèbre 1

Durée 1h10. Tous documents et calculatrices interdits. Le barème, sur 21 points, est approximatif. Sauf indication contraire, les réponses doivent être justifiées. Les exercices peuvent être faits dans l'ordre que vous voulez.

Exercice 1 (3 pts) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une application. Soient P et Q les propositions suivantes :

P : $(\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) \geq f(n))$ et $(\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq M)$

Q : $\exists L \in \mathbb{R}, \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |f(n) - L| < \epsilon)$

Quelle est la négation de P ? Quelle est la négation de Q ? Quelle est la négation de "P $\Rightarrow$ Q" ?

Exercice 2 (3 pts) Soient E et F des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des applications.

a) (1pt) On suppose que $g \circ f = Id_E$. L'application f est-elle nécessairement bijective ? Justifier.

b) (2pts) Redémontrer que si $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ alors f est bijective et g est son application réciproque.

Exercice 3 (7 pts)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \sin x$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. Dans tout l'exercice, vous pouvez utiliser vos connaissances de terminale sur la fonction sinus.

a) (2pts) f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier brièvement.

b) (2pts) soit $B = [0, \pi]$. Donner sans justifier l'image directe et l'image réciproque de B par f.

c) (3pts) Si $A \subset \mathbb{R}$, on note A^c son complémentaire dans $\mathbb{R}$. On rappelle que $f(\emptyset) = \emptyset$. Les propositions P1, P2, P3 et P4 suivantes sont elles-vraies ou fausses ? Justifier.

P1 : $\exists A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f(A \cap A^c) = f(A) \cap f(A^c)$

P2 : $\exists A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f(A \cap A^c) \neq f(A) \cap f(A^c)$

P3 : $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f(A \cap A^c) = f(A) \cap f(A^c)$

P4 : $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f(A \cap A^c) \neq f(A) \cap f(A^c)$

Exercice 4 (8 pts)

Pour tous x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on pose

$$A_{x,y} =]x, x+y[\,, \quad B_x = \bigcap_{y \in \mathbb{R}_+^*} A_{x,y}\,, \text{et } C_y = \bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^*} A_{x,y}.$$

a) (3pts) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $B_x = \emptyset$. Soit $B = \bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^*} B_x$. Déterminer B.

b) (4pts) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer C_y, puis $C = \bigcap_{y \in \mathbb{R}_+^*} C_y$.

c) (1pt) Comparer (au sens de l'inclusion) $\bigcap_{y \in \mathbb{R}_+^*} \bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^*}]x, x+y[$ et $\bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^*} \bigcap_{y \in \mathbb{R}_+^*}]x, x+y[$.

Question bonus (1pt) Dans l'exercice 1, que signifie en termes clairs la proposition $P \Rightarrow Q$?

Corrigé du contrôle continu d'algèbre 1 du 12 octobre 2009

Exercice 1 Les propositions nonP et nonQ sont les suivantes :

nonP : $(\exists n \in \mathbb{N}, f(n+1) < f(n))$ ou $(\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, f(n) > M)$

nonQ : $\forall L \in \mathbb{R}, \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N$ et $|f(n) - L| \geq \epsilon)$

La négation de "P $\Rightarrow$ Q" est la proposition "P et nonQ", nonQ étant la proposition ci-dessus.

Exercice 2

a) Non. Contre-exemple (donné dans le cours) : soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ données par $f(n) = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $g(n) = n-1$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $g(0) = 0$. On a $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$ mais ni g ni f ne sont bijectives.

b) Puisque $g \circ f = Id_E$, $g \circ f$ est bijective, donc injective, donc f est injective. De même, $f \circ g$ est bijective, donc surjective, donc f est surjective. Donc f est bijective et en composant l'égalité $f \circ g = Id_F$ par son application réciproque f^{-1} on obtient $g = f^{-1}$.

Exercice 3

a) f n'est pas injective car $0 \neq 2\pi$ et $f(0) = f(2\pi)$; f n'est pas non plus surjective car $f(x) = \sin x \in [-1, 1]$ pour tout réel x, donc 2, par exemple, n'a pas d'antécédent par f. A fortiori, f n'est pas bijective.

b) On a $f(B) = [0, 1]$ et $f^{-1}(B) = f^{-1}([0, 1]) = \{x + 2k\pi : x \in [0, \pi]$ et $k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Remarquons que pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a $A \cap A^c = \emptyset$, donc $f(A \cap A^c) = \emptyset$. Ceci étant vu :

P1 est vraie. En effet, pour $A = \emptyset$ on a $f(A \subset A^c) = \emptyset = \emptyset \cap f(A^c) = f(A) \cap f(A^c)$.

P2 est vraie car pour $A = \mathbb{R}^+$ on a $f(A) = f(A^c) = [-1, 1]$ donc $f(A) \cap f(A^c) = [-1, 1] \neq \emptyset = f(A \cap A^c)$.

P3 est la négation de P2, et P4 la négation de P1. Or P1 et P2 sont vraies, donc P3 et P4 sont fausses.

Exercice 4

a) Supposons par l'absurde $B_x \neq \emptyset$. Il existe donc un réel z dans B_x. Ce réel appartient donc à $]x, x+y[$ pour tout réel $y > 0$. Donc $z \in]x, x+1[$, donc $z > x$. Donc $(z-x)/2 > 0$ et $z > x + (z-x)/2$. En posant $y = (z-x)/2$ on a donc $y > 0$ mais $z > x + y$ donc $z \notin]x, x+y[$. Contradiction. Donc $B_x = \emptyset$. Ceci est vrai pour tout réel x, donc B est une réunion d'ensembles tous vides, donc $B = \emptyset$.

b) Montrons que $C_y = \mathbb{R}_+^*$. Déjà, $A_{x,y} \subset R_+^*$ pour tout réel $x > 0$, donc $C_y = \bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^*} A_{x,y} \subset R_+^*$. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\epsilon = \min(y, z)$ et $x = z - \epsilon/2$. On a $x > 0$ et $z \in]x, x+y[= A_{x,y}$, donc $z \in C_y$. Donc $R_+^* \subset C_y$ et par double inclusion $C_y = \mathbb{R}_+^*$. Ceci est vrai pour tout réel $y > 0$, donc C est une intersection d'ensembles tous égaux à $\mathbb{R}_+^*$, donc $C = \mathbb{R}_+^*$.

c) On a $\displaystyle\bigcap_{y \in \mathbb{R}_+^*} \bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^*}]x, x+y[= C = \mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^*} \bigcap_{y \in \mathbb{R}_+^*}]x, x+y[= B = \emptyset$. Les deux ensembles ne sont donc pas égaux. On a uniquement $\displaystyle\bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^*} \bigcap_{y \in \mathbb{R}_+^*}]x, x+y[\subset \bigcap_{y \in \mathbb{R}_+^*} \bigcup_{x \in \mathbb{R}_+^*}]x, x+y[$

Question bonus La proposition $P \Rightarrow Q$ signifie que toute suite de réels croissante et majorée converge. Mais bon, ce n'est pas encore à votre portée car pour le voir, il faut connaître la définition de la convergence d'une suite et comprendre qu'une suite de réels ou une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est la même chose.