Université Paris-Dauphine, 2009-2010, Corrigé du partiel d'algèbre 1.

Questions de cours

1) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\right\}$

2) On a $\text{Card}(\{1,\dots,n\}) = \text{Card}\, A = n$. Il n'y a donc pas d'applications de $\{1,\dots,n\}$ dans A injectives mais non surjectives.

3) On a : $\Delta = (2+2i)^2 - 8(1+i(1-\sqrt{3})) = 16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{2i\pi/3} = \delta^2$ avec $\delta = 4e^{i\pi/3} = 2+i2\sqrt{3}$

donc les racines sont : $z_+ = \frac{-b+\delta}{2a} = -i\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ et $z_- = \frac{-b-\delta}{2a} = -1 - i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

4) Soit $z \in A$. On a $|z|^n = |z^n| = |1| = 1$, donc $|z| = 1$. Il existe donc $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. De plus $z^n = e^{in\theta} = 1$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$, donc $k = \frac{n\theta}{2\pi}$. Comme $0 \le \theta < 2\pi$, on a $0 \le \frac{n\theta}{2\pi} < n$ donc $0 \le k < n$ donc $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$.

Donc $z = e^{i\theta} = e^{i2k\pi/n}$ avec $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Donc $z \in B$. Donc $A \subset B$.

Réciproquement, si $z \in B$, alors il existe $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tel que $z = e^{i2k\pi/n}$.

On a donc $z^n = \left(e^{i2k\pi/n}\right)^n = e^{i2k\pi} = 1$ donc $z \in A$ et donc $B \subset A$. Par double inclusion on a $A = B$.

Exercice 1 :

a) r est la rotation de centre l'origine et d'angle θ. π est la projection sur l'axe des réels.

b) Soit $\tilde{r} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \to & ze^{-i\theta} \end{array}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\tilde{r} \circ r(z) = r(z) \times e^{-i\theta} = ze^{i\theta}e^{-i\theta} = z$ et de même $r \circ \tilde{r}(z) = z$. Donc $r \circ \tilde{r} = Id_{\mathbb{C}} = \tilde{r} \circ r$.

Donc r est bijective de réciproque $\tilde{r}$. Puisque r est bijective, r est surjective, donc $r(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

c) $\pi(\mathbb{C}) = [-1,1]$. $\pi^{-1}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}, \pi(z) \in \mathbb{C}\}$. ~~Autrement $\pi^{-1}(\mathbb{C}) = \{1+iy, y \in \mathbb{R}\}$.~~

~~Déjà~~ Soit $B_1 = \{1+iy, y \in \mathbb{R}\}$ et $B_{-1} = \{-1+iy, y \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $\pi^{-1}(\mathbb{C}) = B_1 \cup B_{-1}$.

Déjà, si $z \in B_1$, alors $\pi(z) = \text{Re}(z) = 1 \in \mathbb{C}$ donc $z \in \pi^{-1}(\mathbb{C})$. De même, si $z \in B_{-1}$, $\pi(z) = -1 \in \mathbb{C}$ donc $z \in \pi^{-1}(\mathbb{C})$. Donc $B_1 \cup B_{-1} \subset \pi^{-1}(\mathbb{C})$. Réciproquement, si $z \in \pi^{-1}(\mathbb{C})$ alors $\pi(z) = \text{Re}(z) \in \mathbb{C}$. Mais les seuls réels dans $\mathbb{C}$ sont 1 et -1. Donc $\text{Re}(z) \in \{1,-1\}$ donc $z \in B_1 \cup B_{-1}$ et $\pi^{-1}(\mathbb{C}) \subset B_1 \cup B_{-1}$.

On a vu que si $z \in B_1$, alors $\pi(z) = 1$ et si $z \in B_{-1}$, alors $\pi(z) = -1$.

On a donc $\pi(\pi^{-1}(\mathbb{C})) = \pi(B_1 \cup B_{-1}) = \pi(B_1) \cup \pi(B_{-1}) = \{1\} \cup \{-1\} = \{1,-1\}$.

Géométriquement, $\pi(\mathbb{C})$ est un segment, $\pi^{-1}(\mathbb{C})$ l'union de deux droites