et $\pi(\pi^{-1}(u))$ l'union de deux points.

Exercice 2 :

a) Si f était bijective, on aurait $(f\circ f)\circ f^{-1} = f\circ f^{-1}$ d'où $f = Id_{\mathbb{C}}$. Or $f \neq Id_{\mathbb{C}}$ par hypothèse. Donc f n'est pas bijective.

b). Si $f(z)=z$ alors $z\in f(\mathbb{C})$, puisque $f(z)\in f(\mathbb{C})$. Réciproquement, si $z\in f(\mathbb{C})$, il existe $z'\in\mathbb{C}$ tel que $z=f(z')$. On a $f(z) = f\circ f(z') = f(z') = z$ donc $f(z)=z$.

c). Si f était surjective on aurait $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ et donc d'après b), $f = Id_{\mathbb{C}}$ et on a supposé que ce n'est pas le cas. Donc f n'est pas surjective.

d). D'après c), il existe $z\in\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$. Soit $z'=f(z)$. D'après b), $z'\neq z$, mais $f(z') = f\circ f(z) = f(z)$, donc f n'est pas injective.

e). D'après d), si g est différente de l'identité alors g n'est pas injective. Donc si g est injective, alors $g = Id_{\mathbb{C}}$, donc g est bijective.

f) L'application $h : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ telle que $h(z)=z$ si $z\notin\mathbb{R}$ et $h(z)=e^{z}$ si $z\in\mathbb{R}$.

Autre exemple : l'application $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$$x+iy \mapsto e^{x}+iy$$

Exercice 3

a) $E\neq\emptyset$ donc par (H1), $\inf E$ existe, et $(\inf E)\in E$. On a donc $(\inf E)\in E$ et par définition de la borne inférieure, $\inf E$ minore E, donc $\inf E = \min E$ et $\min E$ existe.

b) Soit $x=\min E$. On a $f(x)\in E$ donc $x\leq f(x)$, donc $x\in A$, donc $A\neq\emptyset$, donc $\sup A$ existe d'après (H1).

c) Soit $y\in f(A)$. Il existe $x\in A$ tel que $y=f(x)$. Comme $x\in A$, on a $x\leq y$, donc par (H2), $f(x)\leq f(y)$ donc $y\leq f(y)$ donc $y\in A$. Donc $f(A)\subset A$.

d) Soit $y=\sup A$. Soit $x\in A$. On a $x\leq y$ donc par (H2), $f(x)\leq f(y)$, donc comme $x\leq f(x)$, car $x\in A$, on a par transitivité $x\leq f(y)$. Donc $f(y)$ majore A. Mais y est le plus petit des majorants de A. Donc $y\leq f(y)$. Donc $y\in A$. Donc par c), $f(y)\in A$. Mais y majore A, donc $f(y)\leq y$ et par antisymétrie $f(y)=y$.

e). Déjà, par d), $y\in B$, où $y=\sup A$. De plus, $B\subset A$, donc y majore B, puisque y majore A. Donc $y=\max B$. Donc $\max B$ existe et $\max B = \sup A$.