Un séjour dans l'hôtel de Hilbert

Préliminaires : on considère ci-dessous des hôtels dans lequel des clients veulent passer la nuit. On suppose toujours que chaque client veut une chambre pour lui tout seul.

Un hôtel normal

Considérons un hôtel "normal", c'est à dire avec un nombre fini de chambres. Supposons que l'hôtel soit plein et qu'un touriste se présente et demande une chambre. Puisque l'hôtel est plein, il sera impossible de lui trouver une chambre et le touriste devra aller dormir ailleurs. Jusque là, tout est conforme à l'intuition.

L'hôtel de Hilbert

Considérons maintenant l'hôtel de Hilbert, un hôtel un peu spécial inventé par le mathématicien Hilbert pour expliquer à ses étudiants les propriétés étranges des ensembles infinis. L'hôtel de Hilbert est un hôtel infini, dans lequel il y a autant de chambres qu'il y a d'entiers naturels. Il y a donc la chambre 0, la chambre 1, la chambre 2, etc. jusqu'à l'infini. Supposons que cet hôtel soit plein et qu'un nouveau client se présente. Bien que l'hôtel soit plein, le réceptionniste pourra lui trouver une place !

Comment ? C'est simple. Il suffit de décaler tous les clients d'une chambre : on demande au client qui occupe la chambre 0 d'aller dans la chambre 1, au client qui occupe la chambre 1 d'aller dans la chambre 2 et plus généralement au client qui occupe la chambre k d'aller dans la chambre $k + 1$. Tous les anciens clients ont bien une chambre, dans laquelle ils sont seuls, et de plus on a libéré la chambre 0, dans laquelle on peut mettre le nouveau client.

Pour voir si vous suivez , un petit exercice : que faire si l'hôtel est plein et qu'un car de 40 touristes se présente ? Réponse à la fin du document. Si vous n'avez pas trouvé, consultez la réponse avant de continuer.

Plus difficile maintenant, supposons que l'hôtel soit plein et qu'un car infini de touristes se présente. Plus précisément, un car dans lequel il y a autant de touristes qu'il y a d'entiers naturels. Il y a donc le touriste numéro 0, le touriste numéro 1, etc. Est-il possible de leur faire une place dans l'hôtel ?

Oui ! Il suffit de demander au client qui occupe la chambre 1 de prendre la chambre 2, au client occupant la chambre 2 de prendre la chambre 4, et plus généralement au client qui occupe la chambre k de prendre la chambre $2k$. Les chambres occupées sont alors les chambres qui portent un numéro pair et les chambres impairs sont vides. On y met les touristes qui viennent d'arriver de la manière suivante : on donne au premier la chambre 1, au deuxième la chambre 3, au troisième la chambre 5 et plus généralement, on donne au k-ième la chambre $2k - 1$. De cette façon , on a bien attribué à chaque ancien client et à chacun des touristes nouvellement arrivés une chambre dans laquelle il est seul.

Mais alors, l'hôtel de Hilbert peut-il loger n'importe quel ensemble de clients ?

Pour loger des clients dans l'hôtel, il faut attribuer à chaque client un entier naturel (son numéro de chambre) de façon à que deux clients différents se voient attribuer des entiers différents. Cela revient à établir une injection de l'ensemble des clients dans l'ensemble des entiers naturels. La question : "l'hôtel de Hilbert peut-il loger n'importe quel ensemble de clients ?" peut donc se reformuler ainsi : "Est-il vrai que pour tout ensemble E, il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$ (ou, de manière équivalente, une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.) ?". La réponse est non. Dans les cas particulier $E = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{Q}$ et même $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on peut trouver une injection de E dans $\mathbb{N}$. On dit que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont dénombrables. Cela veut dire que bien qu'on ait l'impression que, par exemple, l'ensemble des rationnels est beaucoup plus gros que celui des entiers naturels, c'est en fait une illusion d'optique. En un certain sens (celui de pouvoir établir une bijection entre ces ensembles), il y a autant de rationnels que d'entiers naturels. En revanche, il n'existe pas d'injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$: on dit que l'ensemble des réels n'est pas dénombrable. L'ensemble des réels est réellement plus gros que l'ensemble des entiers naturels. Cela signifie que si, alors que l'hôtel de Hilbert est vide, un car infini de touristes se présente dans lequel il y a autant de touristes que de nombres réels, il sera impossible de les loger tous en donnant à chacun une chambre pour lui tout seul.

Compléments : quand un ensemble est fini, il ne peut pas être en bijection avec un de ses sous ensembles stricts. C'est à dire que si E est un ensemble fini et que A est un sous-ensemble de E différent de E, alors il n'existe aucune injection de E dans A. En d'autres termes, si A est strictement inclus dans E, alors A ne peut pas avoir autant d'éléments que E. Comme nous sommes habitués à raisonner avec des ensembles finis, on a l'impression que cette propriété naturelle est universellement vraie. Mais le monde des ensembles infinis est très différent. Par exemple, on a vraiment l'impression qu'il y a beaucoup moins d'entiers naturels pairs qu'il n'y a d'entiers naturels tout court, puisque : "il manque tous les impairs". Pourtant, c'est une impression fausse : si l'on accepte le fait que deux ensembles ont "autant d'éléments" s'ils sont en bijection alors il est facile de voir qu'il y a autant d'entiers que d'entiers pairs. En effet, la fonction f de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des entiers naturels pairs définie par : pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, est une bijection entre ces deux ensembles. Il y a donc autant d'entiers pairs que d'entiers tout court. Il y a plus choquant : il y a autant de rationnels que d'entiers tout court. Il y a autant d'éléments dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que dans $\mathbb{N}$. C'est surprenant, cela a beaucoup perturbé les mathématiciens quand ils s'en sont rendus compte, mais c'est comme ça.

Réponse à l'exercice : il suffit de décaler les clients de 40 chambres. On met le client qui occupait la chambre 0 dans la chambre 40, celui qui occupait la chambre 1 dans la chambre 41, etc. On libère ainsi les chambres 0 à 39.