Dauphine, Dumi2e 1ère année, corrigé du contrôle continu d'algèbre 1 du 07/12/09

Questions de cours

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{N}^*$, des complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_q$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que $P = \lambda (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_q)^{m_q}$. De plus, λ et $\{(\alpha_1, m_1), \dots, (\alpha_q, m_q)\}$ sont uniques, i.e. la décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

2) i) $x \in A$ et $\forall y \in A, x \leq y$.
ii) $x \in A$ et $\forall y \in A, [y \leq x \Rightarrow y = x]$
iii) $[\forall y \in A, x \leq y]$ et $[\forall z \in E, (\forall y \in A, z \leq y) \Rightarrow z \leq x]$

3) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynôme de degré 2 sans racines réelles. En particulier, les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont de degré au plus 2, donc X^4+6 n'est pas irréductible.

4) Soient a et b dans $\mathbb{N}$ avec $b \neq 0$. Soit $A = \{k \in \mathbb{N} \mid kb \leq a\}$. $A \subset \mathbb{N}$ et $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$. ~~Or toute ensemble partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Soit $q = \min A$~~. De plus si $k \geq a+1$ alors $kb \geq (a+1)b \geq a+1 > a$ donc $k \notin A$. Donc A est majoré par $a+1$. Or toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément. Soit $q = \max A$ et $r = a - qb$.
On a : $a = qb + r$. De plus $r \in \mathbb{N}$ car $q \in A$ donc $qb \leq a$ donc $r \geq 0$.
Enfin, $q+1 > q = \max A$ donc $q+1 \notin A$ donc $(q+1)b > a = qb + r$ donc $r < b$.
On a donc $(q, r) \in \mathbb{N}^2$, $a = bq + r$ et $r < b$, ce qui montre l'existence d'un tel couple.

5) Soient A et B dans $\mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Supposons qu'il existe deux couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) dans $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ tels que $\begin{cases} A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2 \\ \deg R_1 < \deg B \\ \deg R_2 < \deg B \end{cases}$

On a alors $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$ donc
$\deg B + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg B(Q_1 - Q_2) = \deg(R_2 - R_1)$. Or $\begin{cases} \deg R_2 < \deg B \\ \deg R_1 < \deg B \end{cases}$
donc $\deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg R_1, \deg R_2) < \deg B$.
donc $\deg(Q_1 - Q_2) < 0$ donc $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$ donc $Q_1 - Q_2 = 0$ donc $Q_1 = Q_2$
et $R_1 = A - BQ_1 = A - BQ_2 = R_2$. Il y a donc au plus un couple (Q, R) tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.