Exercice 1 : Effectuons la division euclidienne

$$\begin{array}{l|l} X^4+3X^3+2X^2+X-1 & X^2+2X-1 \\ X^4+2X^3-X^2 & \hline \\ \hline \quad X^3+3X^2+X-1 & X^2+X+1 \\ \quad X^3+2X^2-X & \\ \hline \qquad X^2+2X-1 & \\ \qquad X^2+2X-1 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

On trouve :

$(X^4+3X^3+2X^2+X-1)$

$= (X^2+2X-1)(X^2+X+1)$

donc X^2+2X-1 divise $X^4+3X^3+2X^2+X-1$.

Exercice 2 : Soit $m \in \mathbb{N}$. Si m a deux antécédents par f, il existe $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$ et $(n',p',q') \in \mathbb{N}^3$ avec $(n,p,q) \neq (n',p',q')$ tels que $m = 2^n 3^p 5^q$ et $m = 2^{n'} 3^{p'} 5^{q'}$. Or 2, 3 et 5 sont premiers. L'entier m aurait donc deux décompositions différentes en produit de nombres premiers. De plus $m > 1$ car on ne peut pas avoir $(n,p,q) = (0,0,0)$ et $(n',p',q') = (0,0,0)$. Donc c'est impossible. Donc f est injective.

En revanche f n'est pas surjective. En effet 7 est un nombre premier et sa décomposition est donc $7 = 7^1$. Comme la décomposition en produit de nombres premiers est unique, 7 ne peut pas s'écrire sous la forme $7 = 2^n 3^p 5^q$ (ce qu'on peut aussi vérifier à la main). Donc 7 n'a pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \deg P$. On a $P^{(n)} = 0$ donc $P^{(n)}(n) = 0 \neq n$. Donc il n'existe aucun polynome P solution.

Remarque : dans l'exercice 2, pour montrer que f est surjective, il suffit de montrer que 0 n'a pas d'antécédent, ce qui est plus simple.